8.42. B. 17

Digitized by Google

8, 42, B. 17

WILHELMI LANGI

DE VERITATIBUS GEOMETRICIS LIBRI. II.

Prior, contra Scepticos & Sextum Empiricum &c. Poſterior, contra Marcum Meibomium.



HAFNIÆ,

Literis PETRI MORSINGI, Reg. & Acad. Typog.

ANNO 1656.

Digitized by Google

HOS

DE

VERITATIBUS. GEOMETRICIS

LIBROS

AUGUSTISSIMO. NOMINI. IPSIUS.

DEBITO. CULTU.

INSCRIPTOS. DICATOSQVE.

HUMILLIME. OFFERT.

REGIÆ. IPSIUS. MAIESTATIS.

FIDELIS. SUBDITUS. ET. SERVUS.

WILHELMUS LANGIUS.

Digitized by Google

IN NOMINE JESU CHRISTI AMEN.

WILHELMI LANGI
DE VERITATIBUS GEOMETRICIS.
LIBER I.
CAPUT I.

QVamqvam omnis humana ſapientia peranguſtis limitibus circumſcribatur; ut vix ullus ſit mortalium qvi non in aliqvo labatur, qvamcunq; is demum *Philoſophiæ* partem attigerit: fatendum tamen eſt, inter omnes humanas diſciplinas & ſcientias nullam eſſe qvæ firmioribus nitatur fundamentis, qvam Matheſis; nullam, qvæ certiora principia magisq; perſpicuas demonſtrationes habeat. Nam cum reliqvæ omnes circa eas verſentur res, qvæ partim propter maximam ſubtilitatem atq; obſcuritatem cognoſci neqveunt; partim ob perpetuam mutabilitatem certis ſcientiæ legibus non tam facile adſtringuntur: Matheſis medium qvaſi ſortita locum, ea conſiderat, qvæ ab ſenſi-

Digitized by Google

bus atq; intellectu haud difficulter percipiuntur; mutationibus tamen ita carent, ut ſcientiæ legibus facilè obtemperent. Quod qvamvis in aliis Matheſeos partibus non tam clare demonſtretur: tamen in Arithmeticis ac Geometricis idipſum adeò manifeſtè deprehenditur; ut nemo qvi veritatem amat iſtarum rerum certitudinem non optime perſpiciat.

In hisce enim ſcientiis nihil ſupponitur aut pro vero admittitur, niſi qvod communis omnium hominum ratio, & ipſum illud veritatis lumen ac divinæ auræ particula omnibus innata hominibus, pro vero agnoſcit ac recipit. Unde mirandum qvàm maximè eſt, dari aliqvos, qui hæc tam certa omnibusq; cognita impugnatum eant, certiſſimasq; veritates communi hominum intellectu comprobatas labefactare, & ſi non falſi arguere, ſaltem in dubium vocare conentur. Eqvidem non me fugit etiam Mathematicos in ſuis aliqvando demonſtrationibus labi atq; errorem committere, (qvod tamen non ipſi ſcientiæ, ſed obnoxio erroribus homini vitio verti debet) qvem tamen vel ipſemet vel alius qvicunque, mòdo omnia accuratè examinaverit, facile detegit. Qvid, qvod plerumq; error vel in verbis omiſſis maléve intellectis, vel in prava demonſtrandi methodo conſiſtat, reſq; ipſa ſit veriſſima: ideoq; facile ab aliis demonſtretur. Et hoc quidem modo multi in ipſo Euclide, qvē Geometrarum principem jure qvis appellaverit, varia emendarunt, partim verbis omiſſa aut deprava-

ta,

Digitized by Google

ta, partim etiam male demonſtrata. Qvibus ſane non ipſe tantum Euclides, ſed & tota poſteritas plurimum debet. Sic Ptolomæus XXIX. propoſitionem Primi. Element. non ſatis accurate ab Euclide demonſtratam, certiori via demonſtrare aggreſſus eſt; qvod alii & ante & poſt ipſum Mathematici etiam attigerunt. In propoſitione vero XVI. libri primi, omiſſa à malis librariis verba μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης vel ut Proclus legit μιᾶς πλευρᾶς προσεκβληθείσης recte cæteri Geometræ repoſuerunt; ne idem aliis eveniret qvod Philippo Mathematico, qvi referente Herone Mechanico hinc anſam traducendi Euclidem arripuit, ut eſt apud Proclum Lib. III. in I. Elem. Euclidis. Horum igitur labores laudem & gloriam merentur; cæterorum vero ſtudia vituperio potius digna: qvi ſincerum vas incruſtare cupientes, optimas ac certiſſimas demonſtrationes partim falſitatis accuſant, partim ut nimis accuratè demonſtratas irrident: qvod ſuperioribus ſeculis àb Epicureis & Scepticis factum fuiſſe legimus; qvorum tamen majorne harum rerum ignorantia an ambitio fuerit vix qvisqvam dixerit. Cum multis qvidem hominibus ita comparatum eſt, ut plus aliis ſapere videri velint: cumq; ſciant, magnam iis gratiam laudemq; ab omnibus deberi, qvi ignotas veritates in lucem protulerint, boniq; aliqvod homines docuerint, qvod antea ignorarunt: hi qvandoqvidem abſtruſas invenire neqveunt, cognitas veritates everſum eunt; & qvamvis claras ac perſpicuas

Digitized by Google

variis tamen ſophismatibus obſcurare conantur; perverſa via gloriam ſectantes. Fateor qvidem hos ipſos verbis veritatē crepare, magnaq; voce profiteri ſe nihil præter veritatem qværere: cum tamen re & opere monſtrent ſe eandem odio proſeqvi & diligenter fugere. Qvi ſi ignorantia peccarent; commiſeratione qvidem digni forent: eo tamen culpandi, qvod earum ſibi rerū ſcientiam arrogent, qvam non habent. Nunc vero, cū in rebus manifeſtis labantur; atq; obfirmato animo veritatem deſpiciant; eoſq; convitiis proſcindant, qvi rectiora tradunt: minimè ſunt ferendi.

Atq; horum ego in numero Marcum Meibomium ponere nollē, Virum cætera doctiſſimum & in utraq; literatura tam Græca qvam Latina probè verſatum, mihiq; amicum; niſi ipſemet vel inter primos locari voluiſſet, editoq; heic publice ſcripto, omnibus Geometris novis veteribuſq; errorem atq; ignorantiam objeciſſet. Libro enim de proportionibus pagina 9. totius ſcripti ſui rationem verbis ſane magnificis ſed vana qvadam jactantia plenis exponit. *Itaq; ait & recentiores omnes reprehendam, qui antiquos non intellexerunt; Et antiquos corrigam, qui malè quædam prodiderunt; Utroſq; inſuper nova docturus.* Ubi vero ad probationes & rem ipſam ventum eſt: tum vero declarat vel ſe nihil in his diſciplinis perſpicere; vel aliis ſplendide imponere velle. Qvæ enim proponit vera & ſana, ea omnibus Geometris

non

non tantum cognita ſunt, ſed & longe meliori medo antea à multis tradita. Cætera vero qvæ attingit, perabſurdis plane principiis, & qvæ vix ipſe Meibomius, apud peritos homines pro ſuis agnoſcet, nituntur. Et qvod peſſimum eſt, ignorantiam earum rerum novis antiqviſque Mathematicis objicit, qvæ ipſis erant notiſſimæ. Nam & compoſitionem rationum in lineis tam ineffabilibus qvam effabilibus adeo clare & perſpicue tradiderunt; ut Meibomii Methodus multo ſit intricatior. Jd qvoq; qvod Theoni aliisq; Mathematicis exprobrat, eos non intellexiſſe qvid veteres per duplam, triplam, qvadruplàmve rationem rationis intelligerent, qvidve voces ποσότης & πηλικότης propriè ſignificarent; plane falſũ eſt: ut propterea tantam hominis audaciam mirari ſatis neqveam; qvi, ut alios accuſet, propriam exiſtimationem in diſcrimen adducere non veretur. Nempe memoria fortè tenebat illud Juvenalis Satira. XIII.

Nam cum magna malæ ſupereſt audacia cauſæ:
Creditur à multis fiducia.

Sed neq; novi qvicqvam invenit Meibomius, de qvo, in Geometria gloriari poſſit: niſi id forte dogma tale cenſendum eſt, qvod contra Euclidem omneſq; Geometras proponit, *duplam nempe rationem dimidiæ rationi eſſe æqualem*; *Et triplam, ſubtriplæ.* Qvod qvidem, alio axiomate non minus falſo confirmat,

Digitized by Google

mat, *ſi duarum rationum termini æqualem habuerint diſtantiam* ab æqvalitate *tum ipſas rationes eſſe æquales*. Qvæ omnia falſa ſunt ac frivola. Qvoniam vero hæc paulo accuratius examinare animus mihi eſt; arbitrabar rectè me facturum, ſi etiam ea breviter pro ratione ſcripti hujus attingerem, qvæ alicujus momenti contra veritatesGeometricas, ac ſigillatim contra Euclidem ab aliis ſunt prolata. Et cum Sceptici atqve inter hos Sextus Empiricus ipſa fundamenta Geometriæ evertere conatus ſit; pauca primum de ipſius ſententia dicemus: inde Epicureorum objectiones expendemus: ac tum Marci Meibomii argumenta examinabimus. Ne vero tantum Euclidi faviſſe videamur ut veritati ea propter qvicqvam detractum vellemus: qvædā etiam eorum, qvæ male ab Euclide ſunt demonſtrata, aut perperam definita, in medium adducemus: & qvomodo rectius demonſtrentur explicabimus. Faveat æterna veritas, nobisqve omnibus veritatis amorem inſpiret.

CAP. II.

Inter varias Philoſophorum ſectas, mirabilis qvædam erat Scepticorum ſeu Pyrrhoniorū, qvi de omnibus rebus dubitabant; neqve ſenſui; neqve intellectui ullam fidem habebant; eo qvod aliqvando falli utrosqve viderent. Auctor hujus Pyrrho Elienſis, de qvo hæc tradit Diogenes Laertius ex Aſcanio Abderita & aliis; qvod nihil turpe aut honeſtum eſſe arbitraretur, nihilq; juſtum aut injuſtum; ſed tantum ex hominum

Digitized by Google

nũ conſtitutione qvædam talia cenſeri. Verba Diogenis Laertii in vita Pyrrhonis adſcribã. οὐδὲν γὰρ ἔφασκεν οὔτε καλὸν οὔτε αἰσχρὸν· οὔτε δίκαιον, οὔτε ἄδικον· καὶ ὁμοίως ἐπὶ πάντων, μηδὲν εἶναι τῇ ἀληθείᾳ, νόμῳ δὲ καὶ ἔθει πάντα τοὺς ἀνθρώπους πράττειν· οὐ γὰρ μᾶλλον τόδε ἢ τόδε εἶναι ἕκαστον. ἀκόλουθος δ᾽ ἦν καὶ τῷ βίῳ μηδὲν ἐκτρεπόμενος μηδὲ φυλαττόμενος, ἅπαντα ὑφιστάμενος ἁμάξας εἰ τύχοι, καὶ κρημνοὺς καὶ ὅσα τοιαῦτα, μηδὲν ταῖς αἰσθήσεσιν ἐπιτρέπων. Σώζεσθαι μέντοι ὑπὸ τῶν γνωρίμων παρακολουθούντων. *Negabat quicquã turpe eſſe aut honeſtum; juſtũ aut injuſtum: eadẽ ratione in omnibus nihil vere eſſe, cæterum lege atque conſvetudine cuncta homines facere. Neq; enim eſſe quicquam illud potius quam iſtud. Conſentanea illi adhæc & vita erat; nihil declinans nihilq; devitans, ſuſtinebat currus, ſi forte occurriſſent, & prærupta & canes & talia, nihil omnino ſenſibus permittens. Servabatur autem à ſequentibus ſe neceſſariis* Enim vero cum nihil natura malum, hominive noxium diceret, ſed tantum ex opinione ita videri: oportebat eum qvi Philoſophum agere vellet, factis declarare, qvod verbis aſſerebat; ideoqve nec currus vitare, nec incurſantes canes. Cæterum verbis quidem hanc ipſum Philoſophiam tradidiſſe, & τὸ ἐπέχειν propoſuiſſe; re vero & opere qvædam pro malis habuiſſe, Æneſidemus aliiq; apud eundem Laertium tradunt. Nam cum aliqvando canem ſibi incurſantem repuliſſet. eamq; ob rem à qvodam argueretur, qvod doctrinæ

ſuæ

Digitized by Google

ſuæ contraria faceret: reſpondit ὡς χαλεπὸν εἴη ὁλοσχερῶς ἐκδῦναι ἄνθρωπον· διαγωνίζεσθαι δὲ ὡς οἷόν τε, πρῶτον μὲν τοῖς ἔργοις πρὸς τὰ πράγματα· εἰ δὲ μὴ, τῷ γε λόγῳ. *Quod perdifficile eſſet hominem penitus exuere. Certandum vero quantum quidem fieri poſſet, primum quidem operibus adverſum res: ſin minus; ſaltem ratione.* Verum in hiſce non opus erat hominem exuere. Si enim revera malum non erat qvod fugiebat: neq; opus erat ejus cauſa hominem exuere. Sed volebat aliqvid dicere; ne aliud verbis docere, aliud re præſtare videretur. Iſta ergo ſecta nullam ſapientiam nullamqve ſcientiam profitebatur: ſed cæterorum qvidem ſapientum dicta evertebat; tota autem ipſius ſcientia in eo conſiſtebat, qvod nihil ſciret. Qvoniam vero hujus ſectæ homines id unicum in omnibus qværebant, ut omnes ſcientias deſtruerent: ne Matheſin qvidem intactam relinqvere poterant, cujus tam claræ veritates, tam certæ demonſtrationes. Hanc ergo ſcientiam ut etiam everterent, varia conqviſiverunt, qvæ tamen talia ſunt ut ab nemine ſano admitti poſſint. In cæteris qvidem diſciplinis non ſolùm aliqvid probabile adferunt; ſed etiam aliqvando veriſſima produnt. ſicut qvando diſputant contra Aſtrologos aliosqve. Sed qvæ contra Geometriam proferunt ea plane abſurda, & communi hominum rationi, adeoqve ipſi veritati contraria. Qvod ut clarius pateat Sexti Empirici librum III. contra Mathematicos qvi

qui inſcribitur contra Geometras diſcutiemus. Priores enim duo, Mathematicos proprie dictos non tangunt: prior enim ſcriptus eſt contra Grammaticos, ſecundus autem contra Rhetoras; ſicut neque poſteriores, præter ſolum quartum, qui eſt contra Arithmeticos. Quæ enim contra Muſicos & Aſtrologos libro V. & VI. proponit potius aliò ſunt referenda. Hujus igitur viri argumenta nunc examinemus

CAP. III

Primum quod in Geometris accuſat Sextus Empiricus eſt, quod ad res ſuas demonſtrandas utantur hypotheſibus. Ita enim librum III. inchoat. Ἐπεὶ οἱ Γεωμέτραι συνορῶντες τὸ πλῆθος τῶν ἐπακολουθούντων αὐτοῖς ἀποριῶν εἰς ἀκίνδυνον εἶναι δοκοῦν καὶ ἀσφαλὲς πρᾶγμα καταφεύγουσι τὸ ἐξ ὑποθέσεως αἰτεῖσθαι τὰς τῆς Γεωμετρίας ἀρχὰς· καλῶς ἂν ἔχοι καὶ ἡμᾶς τῆς πρὸς αὐτοὺς ἀντιῤῥήσεως ἀρχὴν τίθεσθαι τὸν περὶ τῆς ὑποθέσεως λόγον. *Quoniam Geometræ, conſiderantes multitudinem dubitationum quæ ipſos conſeqvuntur, confugiunt ad rem quæ videtur tuta & remota à periculo nempe ut ex hypotheſi petant principia Geometriæ; bene erit ſi nos quoque contra eos dicendi principium ſumamus ex eo quod dicendum eſt de hypotheſi.* Et libro I. in ipſa totius operis præfatione ait hoc ſigillatim contra Geometras dici *quod non oporteat accipere principia ex hypotheſi.* πρὸς δὲ Γεωμέτρας περὶ τοῦ μὴ δεῖν ἐξ ὑποθέσεως λαμβάνειν

τὰς ἀρχάς. Explicat vero ipſemet quid per ὑποθέσεις intelligat, nempe non tragicam aut comicam hypotheſin quam actuum argumentum vocant; neque eam qua Rhetores utuntur, in quæſtione ſingularium, ſed quæ denotat principium demonſtrationum, ὑπόθεσιν καλοῦμεν ἀρχὴν ἀποδείξεων αἴτησιν οὖσαν πράγματος εἰς κατασκευήν τινος. *Hypotheſin vocamus principium demonſtrationum petitionem rei ad aliquid probandum.* Sed cũ tria principiorum genera Geometræ habeant, variaq; ſub nomine hypotheſeos comprehendantur ab hoc Auctore non explicata, ex mente ipſorum Geometrarum hanc vocem exponemus. Proclus ergo commentario ſecundo in 1. Element. Euclidis, pág. 22. hæc de principiis Geometriæ juxta Euclidem tradit. Ἔπειτα καὶ αὐτὰς διαιρεῖ (ὁ Εὐκλείδης) τὰς κοινὰς ἀρχὰς εἴς τε τὰς ὑποθέσεις καὶ τὰ αἰτήματα καὶ τὰ ἀξιώματα· διαφέρει γὰρ ταῦτα πάντα ἀλλήλων, καὶ οὐκ ἔστι ταυτὸν ἀξίωμα καὶ αἴτημα καὶ ὑπόθεσις, ὥ πού φησιν ὁ δαιμόνιος Ἀριστοτέλης· ἀλλ' ὅταν μὲν καὶ τῷ μανθάνοντι γνώριμον ᾖ, καὶ καθ' αὐτὸ πιστὸν παραλαμβανόμενον εἰς ἀρχῆς τάξιν, ἀξίωμα τὸ τοιοῦτόν ἐστιν, οἷον, Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι. Ὅταν δὲ μὴ ἔχῃ μὲν ἔννοιαν ὁ ἀκούων τοῦ λεγομένου τὴν αὐτόπιστον, τίθεται δὲ ὅμως καὶ συγχωρεῖ τῷ λαμβάνοντι, τὸ τοιοῦτον ὑπόθεσις ἐστι. Τὸ γὰρ εἶναι τὸν κύκλον σχῆμα τοιόνδε, κατὰ κοινὴν μὲν ἔννοιαν οὐ προειλήφαμεν ἀδιδάκτως· ἀκούσαντες δὲ συγχωροῦμεν ἀποδεί-

δείξεως χωρίς. Ὅτε δὲ αὖ καὶ ἄγνωστον ᾖ τὸ λεγόμενον, καὶ μὴ συγχωροῦντος τοῦ μανθάνοντος ὅμως λαμβάνεται· τηνικαῦτα φησὶν αἴτημα τοῦτο καλοῦμεν, οἷον τὸ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας εἶναι. Quæ ita verto. *Deinde ipſa quoque communia principia dividit* (Euclides) *in hypotheſes poſtulata & Axiomata. Differuut enim hæc invicem, neq; idem ſunt Poſtulatum, Axioma & Hypotheſis, ſicut etiam divinus Ariſtoteles alicubi docet. Quando enim id quod pro principio aſſumitur, & diſcenti notum eſt, & per ſe manifeſtum ac fide dignum: tùm Axioma id vocatur. quale illud eſt: Quæ eidem ſunt æqualia etiam inter ſe ſunt æqualia. Cum vero auditor, cognitionem per ſe claram & certam non habuerit ejus quod dicitur; ponit tamen unà id ipſum & concedit aſſumenti: tum hypotheſis eſt. Nam quod circulus talis ſit ſigura, non quidem per communem notionem ſine omni doctrina percipimus: quando vero id audimus ſtatim concedimus absq; demonſtratione. Quando autem id quod dicitur, neque cognitum ſuerit auditori, neque ab ipſo conceſſum, & tamen aſſumiiur; tum illud poſtulatum dicimus. ſicut illud, omnes rectos angulos invicem eſſe æquales.* Et hæc quidem ita explicari ait ab Ariſtotele; alios vero non tam accuratè hæc diſtingvere. Καὶ κατὰ μὲν Ἀριστοτέλους ὑφήγησιν τοιοῦτον διώρισθαι τὸν τρόπον Ἀξίωμα καὶ Αἴτημα καὶ Ὑπόθεσις. Πολλάκις δὲ καὶ ταῦτα πάντα καλοῦσιν ὑποθέσεις, ὥσπερ οἱ ἀπὸ τῆς Στοᾶς Ἀξίωμα πᾶ-

πᾶσαν ἀπόφασιν ἁπλῆν ὥστε κατὰ μὲν τούτους καὶ αἱ Ὑποθέσεις Ἀξιώματα. κατὰ δὲ τοὺς ἑτέρους καὶ τὰ Ἀξιώματα Ὑποθέσεις. *Et ſecundum Ariſtotelis quidem ſententiam hoc modo differunt Axioma Poſtulatum & Hypotheſis. Sæpe autem & hæc omnia vocantur Hypotheſeis, ſicut omnis ſimplex affirmatio Stoicis Axioma dicitur. Adeoq; his quidem ipſæ quoque Hypotheſes Axiomata ſunt: aliis vero ipſa quoq; Axiomata ſunt Hypotheſes.* Atq; hæc ultima verba diligenter ſunt conſideranda. neq; enim optimi Scriptores Geometræ hanc Hypotheſeos diſtinctionem accurate obſervant. Ariſtarchus quidem Samius in libro. Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων Ἡλίου τε καὶ Σελήνης. *de magnitudine & diſtantia. Solis & Lunæ* (quod unum ex omnibus ipſius ſcriptis ſupereſſe arbitror) aliter voce Hypotheſeos videtur uſus fuiſſe: quem quidem ſcriptorem magni ſane nominis ſummæque auctoritatis Latine à ſe verſum edidit Federicus Commandinus vir de tota re Mathematica præſertim vero de antiquis Geometris optime meritus. Græcum vero textum ex tribus bonæ notæ Codicibus MSS. Bibliothecæ Regiæ Pariſienſis exſcripſi, quorum copiam, ſicut & aliorum omnium tam Regiæ quam propriæ Bibliothecæ MSStorum mihi fecerunt Clariſſimi & nunquam ſatis laudati Viri Petrus & Jacobus Puteani, quibus ſane ergo ob id aliaque in me collata beneficia plura me debere fateor quam præſtare poſſim. Is ſcriptor principio operis ſui

ſui à me nunc laudati ſex Ὑποθέσεις ut ipſe vocat præmittit, ex quibus ſua demonſtrare vult: quas omnes adſcribam, ut eo rectius judicari poſſit quid per vocem ὑποθέσεως intelligat.

Ὑποθέσεις ϛ'. Α. Τὴν Σελήνην παρὰ τοῦ Ἡλίου τὸ φῶς λαμβάνειν. Β. Τὴν Γῆν σημείου τε κέντρου λόγον ἔχειν πρὸς τὴν τῆς Σελήνης σφαῖραν. Γ. Ὅταν ἡ Σελήνη διχότομος ἡμῖν φαίνηται, νεύειν εἰς τὴν ἡμετέραν ὄψιν τὸν διορίζοντα τό τε σκιερὸν καὶ τὸ λαμπρὸν τῆς Σελήνης μέγιστον κύκλον. Δ. Ὅταν ἡ Σελήνη διχότομος ἡμῖν φαίνηται, τότε αὐτὴν ἀπέχειν τοῦ Ἡλίου ἔλασσον τεταρτημορίου, τῷ, τοῦ τεταρτημορίου τριακοστῷ. Ε. Τὸ τῆς σκιᾶς πλάτος σεληνῶν εἶναι δύο. ϛ'. Τὴν Σελήνην ὑποτείνειν ὑπὸ πεντεκαιδέκατον μέρος ζῳδίου.

Hypotheſes ſex. I. Lunam à Sole illuminari. II. Terram ad Lunæ Sphæram puncti & centri rationem habere. III. Quando Luna biſecta nobis apparet, tum quidem maximum in ea circulum qui lucidum ab obſcuro diſterminat, verſus noſtrum aſpectum inclinare. IIII. Quando Luna biſecta nobis apparet tunc abeſſe illam à Sole minus quadrante circuli, parte quadrantis trigeſima. V. Latitudinem umbræ duarum eſſe Lunarum. VI. Lunam ſubtendere quintamdecimam partem ſigni. Ex his Ariſtarchi verbis liquet neque eum in generali ſenſu uſum fuiſſe voce ὑποθέσεως quo ipſa quoque axiomata comprehendit; neque ſpeciali, pro

Digitized by Google

iis quæ demonſtrari quidem nequeunt; conceduntur tamen ab auditore ſed per ὑποθέσεις id præcipue indicaſſe quod Proclus ex mente Ariſtotelis vocat poſtulatum. Neque enim vel prima vel ſecunda vel tertia hypotheſis aut certius cognita eſt ex ſe, aut facilius à quoquam admiſſa, quam illud, *Omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales*. Poſteriores vero tres hypotheſes etiam falſæ ſunt, quod ex noſtri temporis obſervatis liquet. Neque enim Luna in quadraturis triceſimam partem deficit à quadrante, neque ſua diametro quintamdecimam partem ſigni ſeu duos gradus ſubtendit. quæ omnia ex fallacibus obſervationibus dependent. Hypotheſis igitur Ariſtarcho idem eſt quod Αἴτημα ſive poſtulatum Ariſtoteli. Sed neq; Archimedes ipſe voces has tam accurate diſtingvit. Libro enim I. de Sphæra & Cylindro, dicit primùm ſe ponere τά τε Ἀξιώματα καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν, *Axiomata & ea quæ aſſumuntur ad horum demonſtrationem*. Recenſet vero partim definitiones quaſdam, partim etiam hypotheſes. Omnibus autem recenſitis hæc demum verba ſubjungit Τούτων δὲ ὑποκειμένων *His ita ſuppoſitis*. Vocat ergo ſuppoſitiones id quod antea axiomata appellaverat. Libro vero primo *æquiponderantium*, ea quæ illeic axiomata dixerat, heic poſtulata vocat; & tamen hypotheſes. Adeo ut hypotheſis Archimedi ſit omne illud quo ad demonſtrandum aliquis quocunque modo utitur, non demonſtrato. Vide

de Præfationem ipſius in librum de Conoidibus & Sphæroidibus ad Doſitheum. Hanc ergo ob cauſam Sextus quoque Empiricus per ὑποθέσεις Geometrarum intelligit omne id quod ſupponunt non demonſtratum, tam definitiones & poſtulata, quã Axiomata. Quoniam vero omnes ſcriptoris hujus cavillationes ex male vel intellecta vel uſurpata voce hypotheſeos fluant, operæ precium erit accuratius eam explicare. Præter eas ergo ſignificationes quas Sextus recenſet, denotat hypotheſis theſin aliquam cujus una pars vera eſt, altera falſa. Ariſtoteles Analyt. Poſterior. lib. 1. c. 2. θέσεως δὲ ἡ μὲν ὁποτερονοῦν τῶν μορίων τῆς ἀποφάνσεως λαμβάνουσα (οἷον λέγω τὸ εἶναί τι ἢ μὴ εἶναί τι) ὑπόθεσις· ἡ δὲ ἄνευ τούτου ὁρισμός. ὁ γὰρ ὁρισμὸς θέσις μέν ἐστι, τίθεται γὰρ ὁ Ἀριθμητικὸς μονάδα τὸ ἀδιαίρετον εἶναι καὶ τὸ ποσόν. Ὑπόθεσις δὲ οὐκ ἐστί. Τὸ γὰρ τί ἐστι μονὰς, καὶ τὸ εἶναι μονάδα οὐ ταυτόν. *Poſitionis duæ ſunt ſpecies, una hypotheſis dicitur cum alterutra pars enunciationis veluti aut eſſe aliquid aut non eſſe ſumitur: Altera eſt definitio in qua neutrum accipitur. Nam & definitio ſpecies poſitionis eſt. Ponit enim verbi gratia Arithmeticus unitatem eſſe indiviſibilem, & quantum. Nec tamen definitio eſt hypotheſis. Neque enim idem eſt dicere quid ſit unitas, & quod ſit.* Differt tamen & hypotheſis hæc & definitio ab Axiomate, ut hic auctor docet, verbis antecedentibus. Ἀμέσου δ' ἀρχῆς συλλογιστικῆς θέσιν μὲν λέγω ἣν μὴ ἔστι δεῖξαι,

μηδ-

μηδ' ἀνάγκη ἔχειν τὸν μαθησόμενόν τι. Ἣν δὲ ἀνάγκη ἔχειν τὸν ὁτιοῦν μαθησόμενον, ἀξίωμα. *Principium immediatum argumentationis duplex eſt. unum quidem theſis dicitur, quod demonſtrari non poteſt, nec tamen neceſſiario verum videtur illi qui hæc diſcere cupit. Si vero neceſſario verum fuerit Axioma appellatur.* Capite vero libri hujus VIII. ad quem locum ſine dubio reſpexit Proclus diſcrimen inter Hypotheſin & poſtulatum hoc ponit, quod ea quidem aſſumatur conſentiente illo qui erudiri vult, hoc autem, vel non conſentiente vel etiam contrarium ſentiente. Ὅσα μὲν οὖν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει αὐτὸς μὴ δείξας, ταῦτα, ἐὰν μὲν δοκοῦντα λαμβάνῃ τῷ μανθάνοντι, ὑποτίθεται· καὶ ἔστιν οὐχ ἁπλῶς ὑπόθεσις, ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον. Ἐὰν δὲ ἢ μηδεμιᾶς ἐνούσης δόξης, ἢ καὶ ἐναντίας ἐνούσης λαμβάνῃ· τὸ αὐτὸ αἰτεῖται. Καὶ τούτῳ διαφέρει ὑπόθεσις καὶ αἴτημα. *Quando vero aliquis ea aſſumit quæ alibi ſunt demonſtrata, neque ipſemet ea demonſtrat; tùm ſi quidem diſcenti eadem probentur, ſupponere iſta dicitur: ſi vero ea aſſumat quæ diſcenti vera non videntur, aut quorum contraria potius videntur; tùm poſtulare dicitur. Et hac re differt poſtulatum ab Hypotheſi.* Differunt ergo inter ſe hæc quatuor. Axioma, Definitio, Hypotheſis, Poſtulatum. Prius enim demonſtrari quidem non poteſt, neceſſario tamen verum eſſe deprehenditur. Alterum autem neceſſariò pro vero non recipitur; ſicut neque tertium; quæ eo quidem inter ſe diffe-

differunt, quod hoc alterutram enuntiationis partem admittat: illud vero ſimpliciter aliquid definiat: ambo tamen hòc à quarto diſtingvuntur, quod iſta quidem conſentiente auditore aſſumantur, hoc vero, ne quidem conſentiente. Quæ ut rectius intelligantur, Geometricis exemplis hæc omnia exponemus. Supponit Geometra dari longitudines, latitudines, & profunditates. & longitudines quidem poſſe concipi ſine latitudine, ac tum lineam vocat talem longitudinem; tùm quoq; eandem longitudinem poſſe conſiderari cum latitudine, ſed ſine profunditate, quam quidem ſuperficiem appellat. Si vero omnes tres dimenſiones conſiderentur corpus hoc appellat. Supponit etiam poſſe ſuperficiem varias figuras conſtituere, vel circularem, vel quadratam, vel aliam quamcunque. Si ergo quis hæc negaret, utique diceret Geometra, vel longitudo eſt, vel non eſt. Si non eſt, ergo omnes res una cohærent, ac inter nullas datur diſcrimen aut intervallum, imo omnia *unum* punctum conſtituunt. Cum ergo *hæc* falſa ſunt atque abſurda, patet longitudines ac latitudines eſſe, adeoque & lineas & ſuperficies & circulos & ſphæras cæteraque omnia. Hæc ergo ex hypotheſi poſita dicuntur, cujus tamen hypotheſeos nullus Mathematicorum meminit, quod de his neminem ipſis litem moturum confidant, adeoque hac in re vel ipſo Sexto Empirico teſte recte faciunt Geometræ quod hujus hypotheſeos nullam mentionem faciant. Verba ejus ſunt dicto libro.

Καὶ μὴν τὸ ὑποτιθέμενον πρᾶγμα ἤτοι ἀληθές ἐστι καὶ τοιοῦτον, ὁποῖον αὐτὸ ὑποτιθέμεθα, ἢ ψεῦδος. Ἀλλ' εἰ μὲν ἀληθές ἐστι, μηδὲ αἰτώμεθα αὐτό, εἰς πρᾶγμα ὑποψίας πλῆρες καταφεύγοντες τὴν ὑπόθεσιν, ἀλλ' αὐτόθεν λαμβάνωμεν, ἐπείπερ οὐδεὶς τ' ἀληθῆ καὶ ὄντα ὑποτίθεται, καθάπερ οὐδὲ τὸ νῦν ἡμέραν εἶναι, ἢ ἐμὲ διαλέγεσθαι καὶ ἀναπνεῖν, ἡ γὰρ περιφάνεια τούτων τῶν πραγμάτων αὐτόθεν βέβαιον ἔχει τὴν θέσιν, καὶ οὐ διασταζομένην τὴν ὑπόθεσιν. *Res enim quæ ſuponitur vel vera eſt & talis qualis ſupponitur vel falſa. Quod ſi vera, ne eam petamus, neque ad rem ſuſpicione plenam confugiamus nempe hypotheſin, ſed ipſam ex ſeipſa aſſumamus: quandoquidem vera & quæ vere exiſtunt nemo ſupponit, ſicut diem nunc eſſe aut me diſcurere vel reſpirare. quoniā enim hæc manifeſta ſunt per ſe etiam firmā habent demonſtrationem, non vero dubiam hypotheſin.* Et ſane dari longitudines & latitudines adeoque lineas & ſuperficies, tam certum eſt quam diem nunc eſſe, aut nos reſpirare. Et hæc quidem hypotheſes vocari poſſent. Nec tamen Geometræ illas hypotheſes intelligunt quando tales nominant, ſed longe alias de quibus poſtea.

Quoniam ergo apud omnes in confeſſo eſt lineas, ſuperficies ac cæteram Geometriæ materiam dari, ne de vocibus litigium oboriatur, voces ſuas primum explicant Geometræ, quibus ſingulas res nominant quæ in Geometria conſiderantur. Oportebat enim eos qui veriſſima prodere vellent & omnibus clara, illam quoque difficultatem tollere quæ ex ignoratis ſcien-

ti-

tiæ terminis oboriri poſſet, ac ſemel certo conſtituere, quænam res ſingulis verbis indicaretur, ne id quod de circulo demonſtraretur alius de parabola propoſitum crederet; aut quod triangulo Iſoſceli conveniret, cuivis triangulo applicaret. Definitiones igitur in Geometria nihil aliud ſunt quam vocum ac terminorum explicationes, quid nempe & quas res Geometræ talibus vocibus denotent. Sunt vero hæ ſimplices poſitiones, non quidem neceſſario veræ ſed quas nemo non conceſſerit. Ut verbi gratia Triangulum eſt figura tribus lateribus & tribus angulis conſtans. Simplex hæc aſſertio eſt nullam partitionem habens. Neceſſario quidem vera non eſt. Neque enim tam evidenter patet Triangulum talem eſſe figuram, ac bis bina eſſe quatuor. Nemo tamen talem ſuperficiē quæ tribus lateribus & tribus angulis clauditur, triangulum eſſe negaverit, nemo non conceſſerit hanc rem ita appellari poſſe.

Axiomata vero in Geometria neceſſario vera ſunt. Ut quæ eidem æqualia etiam inter ſe eſſe æqualia. Et æqualia æqualibus addita tota facere æqualia. Hæc enim neceſſario vera ſunt, de quibus omnes homines, etiam cæcus qui dignoſcere non poteſt utrum nox an dies ſit, certo pronuntiant hæc veriſſima eſſe.

Poſtulata vero & petitiones ad conſtructionem diagrammaton ſunt neceſſaria. Ideoque ſive auditor iſta mihi concedat, ſive non, ego tamen id mihi ſumo. Si enim Propoſitionem quandam demonſtraturus copiam

Digitized by Google

piam peterem ducendi lineam v. g. à puncto A. ad punctum B. ſi auditor id mihi negaret, ego tamem id facerem meamque demonſtrationem perficerem, cum ego æqua peterem, is vero iniqve ageret quod juſta petenti non concederet.

Sunt vero præterea quædam alia apud Geometras quæ ſupponuntur ſæpenumero falſa, ex quibus tamen ut veris argumentor. Ut v. g. demonſtraturus in triangulo quodam rectangulo hypothenuſam eſſe 100 pedum quando baſis ſubtendens 30. gr. fuerit pedum ccc. ſuppono in triangulò v. g. ABC. in figur. n. I. AB. eſſe 300. pedum: quod tamen verum non eſt, vix enim octavam aut decimam partem pedis æquat. Sed iſtud quidem ita fit ob commoditatem demonſtrandi. Ipſa autem demonſtratio non in ipſis lineis conſiſtit, ſed in iis veritatibus; quæ ex claris axiomatibus demonſtrantur, ut poſtea patebit. Atque hæ poſſunt proprie hypotheſes dici. Hiſce ita explicatis, nunc ipſius Sexti Argumenta audiamus.

CAP. IIII.

Primum ergo ipſius argumentum id concludere conatur, nullam demonſtrationem aut certitudinem per hypotheſin poſſe haberi. Epilogiſmo autem tali utitur. Ἤτοι ἰσχυρόν ἐστι καὶ βέβαιον πρὸς πίστιν τὸ ἐξ ὑποθέσεώς τι λαβεῖν, ἢ ἄπιστόν τι καὶ ἀσθενές. Ἀλλ' εἰ μὲν ἰσχυρὸν, καὶ τὸ ἀντικείμενον ἐξ ὑποθέσεως ληφθὲν πιστὸν γενήσεται καὶ βέβαιον, ὥστε θήσωμεν τὰ μαχόμενα. Εἰ δὲ, ἐπὶ τοῦ τὸ ἐναντίον ἐξ ὑποθέσεως λαμβάνοντος χω-

Digitized by Google

χωρὶς ἀποδείξεως, ἄπιςόν ἐςιν, ἡ ὑπόθεσις ἄπιςος γενήσεται καὶ ἐπ᾽ ἐκείνου, ὥςε οὐδέτερον αὐτῶν θήσομεν. Οὐ τοίνυν ληπτέον ἐςὶν ἐξ ὑποθέσεώς τι. Quæ ita verto (interpres enim ſicut in plurimis aliis locis ita heic quoque auctorem non intellexit, ſed ſenſum plane invertit). *Aut validum & fide dignum eſt ex hypotheſi ſumptum argumentum, aut invalidum & fide minime dignum. Si validum, ergo & contrarium ſi ex hypotheſi ſumatur verum erit & firmum, adeoque pugnantia invicem ponentur. Si vero contrario ex hypotheſi poſito ſine demonſtratione argumentatio falſa evadit, ergo & alterius hypotheſis incredibilis quoq; erit. ut neutrum ſit affirmandum. Nihil ergo accipiendum eſt ex hypotheſi*. Quæ quoniam non ſatis clara ſunt, nonnihil illuſtrare conabimur. Sexti argnmentum hoc eſt. Modus demonſtrandi ex hypotheſi vel legitimus erit verumque inveniet, vel non inveniet. Si non invenit verum, rejiciendus plane eſt. Si invenit, ergo omnis argumentatio ex hypotheſi ducta vera erit. Habet autem hypotheſis duo membra ut ex Ariſtotele explicatum, è quibus unum ponitur alterum tollitur. Veluti in hoc exemplo. Homo vel eſt animal rationale, vel irrationale: ſed eſt rationale, ergo non eſt irrationale. Heic demonſtratur hominem non eſſe animal irrationale ex hypotheſi. Sumo enim Hominem eſſe animal: Omne autem animal eſt vel rationale vel irrationale. Suppono autem eſſe rationale, quod tamen non demonſtro. Dicit ergo Sextus, quod ſi altera pars hypotheſeos ſumatur: tum concludi hominem eſſe ani-

Digitized by Google

animal irrationale. Si enim dixerim, ſed eſt irrationale. Ergo concluſio erit non eſſe rationalem. Neutra ſubſumptio ex demonſtratione eſt, ideoque æque hoc dicere poſſum ac illud. At vero ultimo hoc modo falſum concluditur. ergo modus argumentandi per hypotheſin falſum concludit, ideoque legitimus ac probus non eſt. Hæc ſumma eſt argumenti hujus Pyrrhonici. Sed videndum quid contra Geometras concludat. De tali quidem Hypotheſi loquitur cujus una pars aſſumitur, altera rejicitur, quæ etiam propriè & ſtrictè ſecundum Ariſtotelem loquendo Hypotheſis appellatur. Verum tales Hypotheſes Geometria ignorat. Definitiones enim non dicunt lineam eſſe longitudinem latitudine carentem, vel non eſſe: ſed ſimpliciter ponunt lineam eſſe longitudinem. Ita in cæteris definitionibus. Sed neque Axiomata duo membra habent, verũ unam rem ſimpliciter affirmant: quod ipſum quoq; in Poſtulatis contingit. In ipſis quoque falſis hypotheſibus Geometræ ſimpliciter eam ponunt ex qua argumentantur, ut in triangulo ABC fig. I. ponunt ſimpliciter lineam AB. 300 pedum. Hoc ergo Sexti argumentum contra Geometras non eſt, & monſtrat ſe vel Geometricarum rerum plane rudem fuiſſe, vel inſignem rabulam agere voluiſſe qui conquiſitis adeo mendaciis veritatem undique obſcurare conetur, cujus generis homines optandum foret ut noſtra ætas ignoraret. ſed proh dolor nullum ſeculum hoc fæcundius. Cupiunt enim homines illudi amantque

que

Digitized by Google

que eos qui ſpecioſiſſimis verbis fraudem ſibi facere poſſunt: eos vero deteſtantur quibus veritas cordi eſt. Quippe pauciſſimi ſunt qui verã ſapientiam amant, pauciores adhuc qui intelligunt. Ideoque ſæpe nunc illud pluribus in locis contingit, quod Anacharſis quidam Schyta ſuo ævo apud Græcos notavit ὅτι λέγουσι μὲν οἱ σοφοὶ παρ' Ἕλλησι, κρίνουσι δὲ οἱ ἀμαθεῖς. *quod ſapientes quidem proponant apud Græcos: ſed indocti judicium ferant*. Verum fruſtra deploramus quæ corrigi nequeunt. Ad Sextum noſtrum revertamur, qui quidem primo ſuo argumento nihil contra Geometras evicit. videndum quid aliis præſtet. Pergit igitur Καὶ μὴν τὸ ὑποτιθέμενον πρᾶγμα ἤτοι ἀληθές ἐστι καὶ τοιοῦτον ὁποῖον αὐτὸ ὑποτιθέμεθα, ἢ ψεῦδος. Ἀλλ' εἰ μὲν ἀληθές ἐστι, μηδὲ αἰτώμεθα αὐτὸ, εἰς πρᾶγμα ὑποψίας πλῆρες καταφεύγοντες τὴν ὑπόθεσιν, ἀλλ' αὐτόθεν λαμβάνωμεν. ἐπείπερ οὐδεὶς τ' ἀληθῆ καὶ ὄντα ὑποτίθεται, καθάπερ οὐδὲ τὸ νῦν ἡμέραν εἶναι ἢ ἐμε διαλέγεσθαι ἢ ἀναπνεῖν. ἡ γὰρ περιφάνεια τούτων τῶν πραγμάτων αὐτόθεν βέβαιον ἔχει τὴν θέσιν, καὶ οὐ διασταζομένην τὴν ὑπόθεσιν. ὥστε εἰ ἀληθές ἐστι τὸ πρᾶγμα μηδὲ αἰτώμεθα αὐτὸ ὡς μὴ ὂν ἀληθές. Εἰ δὲ οὐκ ἔστι τοιοῦτο, ἀλλὰ ψεῦδος καθέστηκεν, οὐδὲν ὄφελος ἀνακόψει ἐκ τῆς ὑποθέσεως. Κἂν γὰρ μυριάκις αὐτὸ ὑποτιθέμεθα σαθροῖς ὥς φασι θεμελίοις οὐκ ἀκολουθήσει τὸ συμπέρασμα τῆς ζητήσεως ἐξ ἀνυπάρκτων ὁρμωμένης ἀρχῶν. Οὐ μὴν, ἀλλ' εἴ τις οἷς ἂν ὑποθῆται

θῆται τούτοις τὰ ἀκολουθοῦντα πιστὰ τυγχάνειν ἀξιώσει, μήποτε πᾶσαν ἀναιρεῖ ζήτησιν· εὐθέως γὰρ ὑποθήσεται ἕκαστος ἡμῶν τὸ τὰ τρία τέσσαρα εἶναι· καὶ τούτου δοθέντος συνάξει ὅτι καὶ τὰ ἓξ ὀκτὼ γενήσεται. Ἀλλὰ μὴν τὰ τρία τέσσαρα ἐστὶν ὡς ἡ ὑπόθεσις δίδωσι. τὰ ἄρα ἓξ ὀκτώ ἐστιν. *Id quod ſupponitur vel verum eſt vel falſum. Si verum; ne poſtulemus illud confugientes ad rem ſuſpicione plenam nempe hypotheſin: ſed ipſum illud aſſumamus. quandoquidem nemo vera & quæ exiſtunt ſupponit, ſicut nunc diem eſſe aut me diſcurrere aut reſpirare. manifeſta enim harum rerum veritas, ex ſe firmam poſitionem habet, non vero dubiam hypotheſin. Si ergo verum eſt, ne petamus illud ac ſi verum non eſſet. Quod ſi autem non eſt ejusmodi, ſed falſum ſupponitur, nihil commodi exiſtet ex hypotheſi. Nam etiamſi eam ponamus millies, putridis ut ajunt fundamentis; non ſequetur concluſio quæſtionis, quæ proficiſcitur ex principiis inſufficientibus. Quod ſi quisquam ex quibuscunque ſuppoſitis, conſequentia vera elici dixerit, anne omnem is quæſtionem tollit? Statim enim unusquisque notrum ex hypotheſi ponet tria eſſe quatuor. Et hoc conceſſo colliget ſex octo eſſe. Si enim tria ſunt quatuor & ſex erunt octo. Sed tria ſunt quatuor ut ponit hypotheſis, ergo & ſex erunt octo.* Verum hæc omnia vel ex ipſius Sexti verbis refutantur. Diximus antea Geometras, Axiomata, Definitiones & Poſtulata, non eo modo in Geometricis ponere quo Hypotheſes dubias: ſed ut certa & cogni-

ta

ta principiorum loco adducere, ut ſciat unusquisque quibus ex Principiis Geometræ ſua demonſtrent. Vanum ergo èſt ſophisma Sexti ea quæ vera ſunt non debere ſupponi, ſed ſimpliciter ut verum aſſumi. Neque enim Geometræ aliter quicquam faciunt: nec ideo Axiomata recenſent, aut Definitiones, quod de iis dubitent: ſed ut auditori exponant unde ſua probent. Nemo autem negabit Axiomata Geometrica majorem certitudinem habere quam illa, qvæ ut certiſſima Sextus aſſumi contendit, nempe diem nunc eſſe. De hoc enim cæcus judicare non poteſt: de illis autem quivis ratione præditus. Nam eidem æqualia etiam inter ſe æqualia eſſe omnis ſanus affirmat. Si ergo illa quæ clara ſunt ac certa non dubiè, ſed abſolutè ponenda atque aſſumenda ſunt ut Sextus docet, utiq; principia Mathematica ut omnium certiſſima, vel ipſo fatente ſophiſta, neceſſario ſunt admittenda. Equidem in Trigonometricis aliquando illud contingit, ut linea quæcunque *trium* quatuorve pollicum ſupponatur *trecentorum* aut quadringentorum pedum, nempe ut in antea adducto exemplo, quando ad inveſtigandam longitudinem lateris AC. ſupponitur linea AB. partium 300. Omnia enim ſimilia triangula ſunt proportionalia. ut à Geometris demonſtratur. Qvæ ergo in minori triangulo inter latera fuerit ratio, eadem quoque inter latera majoris trianguli erit, modo hoc illi ſimile fuerit. Neque Geometra de illa linea demonſtrat quam in charta habet, ſed quæ per eam

D de-

denotatur. ut bene ab Ariſtotele eſt obſervatum Poſter. Analyt. lib. I. cap. VIII. Οὐδὲ ὁ Γεωμέτρης ψευδῆ ὑποτίθεται ὥσπερ τινὲς ἔφασαν λέγοντες ὡς οὐ δεῖ τῷ ψεύδει χρῆσθαι· τὸν δὲ Γεωμέτρην ψεύδεσθαι λέγοντα ποδιαίαν τὴν οὐ ποδιαίαν ἢ εὐθεῖαν τὴν γεγραμμένην οὐκ εὐθεῖαν οὖσαν. Ὁ δὲ Γεωμέτρης οὐδὲν συμπεραίνεται τῷ τήνδε εἶναι γραμμὴν ἣν αὐτὸς ἔφθεγκται, ἀλλὰ τὰ διὰ τούτων δηλούμενα. *Neque vero Geometra falſũ ſupponit, ut quidã ajunt: dicentes non debere falſum ſupponi: id vero Geometram facere, cum pedalem lineam vocet eam quæ pedalis non eſt, & rectam quæ ſcripta eſt, cum tamen talis non ſit. Sed Geometra non eo quicquam concludit quod hanc lineam talem dicat, ſed eo quod hoc denotatur.* Omnia ergo Sexti Empirici argumenta quibus evincere conatus fuit, male Mathematicos ac ſigillatim Geometras agere, quod demonſtrare conentur ſua ex hypotheſi, falſa ſunt ac frivola. Pergit porro ipſas quoque definitiones unamque omnino Propoſitionem in dubium vocare, de quo ſequenti capite agemus.

CAP. V.

Poſtquam ea quæ contra hypotheſes Geometricas à Sexto Empirico ſunt allata ſatis refutaverimus, conſequens videur, ut ea quoque falſi convincantur, quæ contra Definitiones ab ipſo moventur. Dicit enim ſe ipſa principia Geometriæ falſitatis convincere velle, quo facto, ipſam quoque ſcientiam falſam eſſe conclu-

Digitized by Google

cludit. Sed nulla quidem alia is principia attingit quam ſolas Definitiones, atque in hoc omnem ſuum laborem ponit ut probet, lineæ, puncti, ſuperficiei & corporis definitiones à Geometris allatas, probas non eſſe. Primum ergo videndum nobis eſt, an hoc ſit principia Mathematicorum convellere aut eos falſi arguere: inde quam feliciter hoc ipſum præſtet.

Diximus antea definitiones in Geometricis nihil aliud eſſe quam vocum ſeu terminorum explicationes quibus utuntur. Quantam vero utilitatem id Lectori adferat, quod accurate ſciat quid ſingulis terminis indicetur, illis præcipue cognitum eſt qui aliquam his diſciplinis operam impenderunt. Niſi enim termini eſſent, non tam perſpicuè Geometræ mentem ſuam exponere poſſent. Longis enim verborum ambagibus uti cogerentur, multisque vocibus id explicare quod una fieri poſſet. Quantas vero tum Lectori tenebras offunderent, quantamque difficultatem rebus per ſe explicatu difficilibus adderent. At vero ſi voces quasdam ſimpliciter ponerent, ſine earum explicatione, perſæpe non intelligerentur ab aliis. Si enim quisquam multa de Parabolis, Ellipſibus aut Hyperbolis demonſtraret, neque explicaret quas lineas hiſce vocibus indicaret, ſurdis fabulam narraret. Neceſſariæ ergo ſunt vocum explicationes in Geometricis, ut unus alterum intelligat, facilique negocio ſemel diſcat, quid omnibus in locis tali voce deſignet. Imponit vero Mathematicus nomina ſuis rebus non ſemper quidem opti-

ma & convenientiſſima, ſed ea quæ primum ipſi occurrunt. Neque ſane homini, rebus graviſſimis maximæque utilitatis adeo intento, vitio verti debet, ſi minus proprie loquatur. Qui vero de vocum proprietate ſunt ſolliciti, meliores poſſunt introducere, veritate eadem retenta ac illæſa. Quin etiam alias definitiones earundem rerum in medium adferre, ſi prædeceſſorum minus commodæ, minusve ſufficientes fuerint. Ita Apollonius Pergæus definitionem Coni ab Euclide lib. XI. propoſitam generaliorem reddidit, ut non tantum conis rectis, ſed etiam ſcalenis conveniret. Neq; tamen ideo vel Euclidem refutavit falſive accuſavit, vel principia Mathematica deſtruxit aut dubia reddidit.

Præterea videndum omnino erit quales veritates Definitiones Geometricæ contineant. Nempe ſupponunt tales res de quibus agunt in natura exiſtere: & cum exiſtant, ſimpliciter indicant ſe de iis rebus demonſtrare quæ talem naturam habent. Sic v. g. ſupponit Geometra dari longitudines & latitudines, & poſſe longitudinem conſiderari ſine latitudine, quam tum quidem lineam dicunt. Hanc vero terminos ſuos ſive extrema habere, quæ puncta dicuntur. Poſſe etiam lineas tales invicem jungi, & pro diverſa conjugatione diverſas Figuras facere. Quæ qui negaverit, næ idem interdiu ſolem lucere negabit. Sunt enim clariſſima per ſe, & tam certa quam illa quæ Sextus ut certiſſima ſine hypotheſi ponenda vult. Verum Sexti ipſius verba audiamus. Μέλλοντες δὲ ἑξῆς διδάσκειν ὅτι

ψευ-

ψευδεῖς καὶ ἀπιθάνους αὐτῶν συμβέβηκεν εἶναι τὰς ἀρχὰς τῆς τέχνης. εὐθέως τοίνυν ὡς πρῶτόν τι καὶ στοιχειωδέστατον διδάσκουσιν ἡμᾶς ὅτι σῶμα μέν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἔχον διαστάσεις, μῆκος, πλάτος, βάθος, ὧν πρώτη μὲν διάστασίς ἐστιν ἡ κατὰ μῆκος, ἄνωθεν κάτω, δευτέρα δὲ ἡ κατὰ πλάτος ἀπὸ δεξιῶν ἐπ' ἀριστερά, τρίτη δὲ ἡ κατὰ βάθος ἀπὸ τῶν πρόσω εἰς τοὐπίσω. στιγμῆς μὲν γὰρ ῥυείσης γραμμὴν γίνεσθαί φασι. γραμμῆς δ' ἐπιφάνειαν. ἐπιφανείας δὲ στερεὸν σῶμα, παρὸ καὶ ὑπογράφοντες λέγουσι στιγμὴν μὲν εἶναι σημεῖον ἀμερὲς καὶ ἀδιάστατον ἢ πέρας γραμμῆς. γραμμὴν δὲ μῆκος ἀπλατὲς ἢ πέρας ἐπιφανείας· ἐπιφάνειαν δὲ πέρας σώματος ἢ πλάτος ἀβαθές. *Pergentes autem deinceps dicemus quod falſa & non probabilia contingat eſſe ipſorum artis principia. Statim ergo nos docent tanquam primum & quod maxime accedit ad naturam elementi, quod corpus ſit id quod habet tria intervalla ſeu dimenſiones longitudinem, latitudinem & profunditatem. Quarum quidem prima dimenſio eſt per longitudinem ſuperne deorſum: Secunda autem per latitudinem à dextris ad ſiniſtra: tertia autem per profunditatem ante & retro. Si ergo punctus fluxerit, dicunt fieri lineam, ſi linea autem, ſuperficiem, ſin vero ſuperficies, corpus ſolidum. Deſcribentes igitur dicunt punctum eſſe ſignum carens partibus, & quod nullum ſuſcipit intervallum, aut terminum lineæ. Lineam autem longitudinem carentem latitudine, aut terminum ſuperficiei. Superficiem autem terminum corporis, aut latitudinem carentem*

Digitized by Google

tem profunditate. Atque hæc quidem refutare conatur, ac evincere nec punctum, nec lineam, nec ſuperficiem Geometricam quicquam eſſe. Verum ſatis clare his demonſtrat, non ſe veritatem quærere, ſed tantum quomodo poſſit veritati contradicere. Etenim dari res quasdam quæ longitudinem, latitudinem & profunditatem habeant, non minus clarè patet, quam Solem lucere, aut me nunc reſpirare. Imo de eo quidem etiam illi judicare poſſunt, qui hæc vera eſſe certo dicere nequeunt. Nam interdiu clarum eſſe cæcus non dicet. Neq; cæcus aut ſurdus accurate judicabit quod ego reſpirem. Sed quod longitudinem latitudinem & profunditatem habeam uterque probe noviſſe poteſt, & de ſeipſo aliisque rebus idem judicium ferre. Talem vero rem corpus Mathematici vocant. Si ergo datur res quæ longitudinem latitudinem & profunditatem habet, datur etiam illud quod Mathematici corpus vocant. Datur preterea longitudo & latitudo & profunditas, & ut res diſtinctæ tam ſeparatim, quam conjunctim conſiderari poſſunt. At ſi longitudo conſideratur ſine latitudine, eſt quidem id linea. Linea enim definitur Geometris μῆκος ἀπλατές. *Longitudo ſine latitudine.* Sunt enim res diſtinctæ longitudo & latitudo, ideoque facile unum ſine alio concipi poteſt. Quis enim negaret in ſuperficie ABCD fig. n. 1. cujus longitudo ſit AB latitudo AD. poſſe ſolam longitudinem, utpote rem à latitudine diſtinctam, per ſe concipi. At vero longitudo ita conſiderata, quoad latitudi-

nem

nem dividi nequit, nec ullas partes in latitudine habet. Eſt vero talis linea terminus ſuperficiei & extremum illud quod non tam oculis incurrit, quam mente concipitur, in quo ſuperficies illa deſinit. Si ergo extremum ſuperficiei & integra linea tam ſeparata concipi poſſit, ut nullo modo diviſionem in latitudine admittat; quidni etiam extremum lineæ hoc modo concipi poſſit, ut nullam longitudinem habeat. Extremum enim id eſt quo nihil eſt exterius. at in ſuperficie quidem, quodcunque ullam latitudinem habet, id dividi poteſt. & per conſequens una hujus pars exterior erit; altera interior: adeoque neque illud extremum erit. Ita etiam in longitudine, id extremum erit quod dividi ſecundum longitudinem non poteſt. Si enim dividi poteſt, partes habebit, quæ ambæ quidem extremum illud conſtituere non poſſunt, unum enim eſt extremum. Quoniam ergo extremum quod eſt in longitudine, ſeu terminus lineæ, nullo modo diviſionem in longitudine partesve habeat, utique omnino erit indiviſibile. Eſt enim extremum non ſuperficiei ſed lineæ. At linea antea demonſtrata fuit nullas in latitudine partes habere: atque ex eodem principio conſtat neq; ſecundum profunditatem poſſe dividi. Punctus ergo lineæ terminus neque in longitudine, neque in latitudine, neque in craſſitie ſeu profunditate ullas partes habet, adeoque eſt indiviſibilis. Sexti vero argumenta quod attinet ne hili quidem ſunt. In puris enim cavillationibus conſiſtunt. Ἡ τοίνυν στιγμὴ ἣν φασι σημεῖον

ἀδιά-

ἀδιάστητον ὑπάρχειν, ἤτοι σῶμα νοεῖται, ἢ ἀσώματον. Καὶ σῶμα μὲν οὐκ ἂν εἴη καθ' αὐτούς. τὰ γὰρ μὴ ἔχοντα διάστασιν οὐκ εἶναι σώματα. λείπεται οὖν ἀσώματον αὐτὴν ὑπάρχειν, ὅ πάλιν ἐστὶν ἀπίθανον. Τὸ μὲν γὰρ ἀσώματον οὐδενὸς νοεῖται γεννητικὸν, ὡσανεὶ ἀθιγὲς καθεστώς. ἡ δὲ στιγμὴ νοεῖται τῆς γραμμῆς γεννητική. οὐ τοίνυν ἐστὶν σημεῖον ἀδιάστατον ἡ στιγμή. *Punctus igitur (quem ſignum eſſe dicunt nullum habens intervallum) aut corpus concipitur eſſe, aut incorporeum. Sed corpus quidem ſecundum illos non eſt. Quæ enim intervalla non habent neque corpora ſunt. Reſtat ergo ut incorporeum dicatur. Quod rurſum eſt abſurdum. Incorporeum enim nihil poteſt generare, cum minime tangi poſſit. Intelligitur autem puactus gignens lineam. Non eſt ergo punctus ſignum, nullum habens intervallum.* Sed duplicem heic quidem committit errorem, primum in voce generationis, ſecundum ſupponendo falſum medium terminum. Neque enim Geometræ voce generandi eo modo utuntur quo Phyſici in generatione univoca aut æquivoca; ſed illud quod aliud quocunque modo efficit etiam modo ſenſibus plane imperceptibili & tantum intellectui obvio. Ideoque quando hac in re adhibent vocem γένεσις, ſolam nudamque conſtructionem intelligunt. Sed neque abſolute verum eſt, id quod in argumentatione pro medio termino ſupponit, illud nempe quod generatur debere humano tactui obvium eſſe. Etenim qui minima iſta animalcula conſideraverit, ut pulices aliaſque, earumque con-

Digitized by Google

junctioné viderit, non dicat id quod generat tangi neceſſario debere. Sed & multa animalia ſunt pulice minora, quæ vix integra tangi poſſunt, nedum partes tam exiles, quibus tamẽ generant de qvibus poſtea accuratius. Sed ut ad rem revertamur, non de factione, aut generatione Phyſica heic ſermo eſt, ſed de Geometrica. Poſſe autẽ lineam ex puncto circũducto produci, is minime negabit qui aliquid in rebus ad ſapientiã ſpectantibus noverit. Sit enim planũ quoddã ABCD in fig. n. 1. cujus baſis ſit AB erectũ ſuper aliud planũ AQ ad angulos rectos. Cũ ergo ſuperficies DCAB ulterius in latitudine dividi nõ poteſt, remanet linea AB indiviſibilis, cujus extrema ſunt A & B puncta, quæ poſt infinitã lineæ AB diviſionem remanent indiviſibilia. Maneat punctum B immobile, punctum vero A circumducatur. certum eſt extremum lineæ AB, hoc eſt punctum A, deſcribere lineam circularem AE. Si vero ambo puncta æquali motu ferantur, tum utrumque lineam deſcribere rectam: & punctum quidem B, lineam BE; punctum vero A rectam AF. atque eodem tempore totam lineam AB integram ſuperficiem AF BF. formare: quæ quidem tam clara ſunt ut ab nemine negari poſſint, qui modo recte hæc conceperit. Quoniam vero dubium aliquod heic hærere poſſet; quo modo linea in infinitum ita dividatur, ut ſemper in minores minoresque partes ſecetur, idque in infinitũ; quomodo etiam extremum illud, quod punctum Mathematici dicunt, indiviſibile ſit, aliamque naturam habeat: de hoc ſequenti capite agemus.

Digitized by Google

CAP. VI.

Dicimus ergo lineam quamcunque terminatam in infinitum dividi poſſe: terminum vero lineæ eſſe indiviſibilem. Quod ut demonſtretur, ſuppono cognita & demonſtrata ex Euclide lineam poſſe dividi bifariam, de quo poſtea: & duo latera cujusvis trianguli rectilinei majora eſſe reliquo.

Sint nunc in figura n. 11. extrema duorum planorum rectæ lineæ AC & AB. quæ quidem jungantur invicem circa A ita ut concurrant. Extremitates porro earum C & B jungantur invicem recta CB. Dividatur CB bifariam in E. in linea autem AC ponatur recta CF æqualis ipſi CE: & in AB recta BH æqualis BE. dico CF & BH non concurrere. Si enim concurrerent triangulum conſtituerent, una cum recta linea CB. At tum CB, unum latus hujus trianguli, eſſet æquale FC & HB. binis lateribus ejusdem trianguli, quod eſt abſurdum: ergo FC & HB non concurrunt. Ducatur porro ab F ad A recta, atq; illa duidatur bifariam in G. in recta autem AF ſumatur recta linea FK æqualis FG, & in recta AH, æqualis ipſi HG, recta HI. non tamen concurrent KF & HI. Si enim concurrerent, conſtituerent triangulum una cum linea FH. at ſic duo latera trianguli rectilinei KF & IH eſſent æqualia reliquo, quod eſt abſurdum, ſunt enim neceſſario majora. Cum ergo KF & HI non concurrant, ducatur recta à K. ad I. dividaturque bifariam in L. & in recta AK ſumatur linea KM. æqualis ipſi KL, & IN

æqua-

Digitized by Google

æqualis ipſi IL. ut ambæ KM & IN æquentur toti KI: dico rectas KM & IN non concurrere. Si enim concurrerent, facerent cum linea KI triangulum, & ſic duo latera, ejusdem trianguli rectilinei, non eſſent majora reliquo, ſed illi æqualia, quod eſt abſurdũ. Si igitur progrediar conjungendo MN, & dividendo rectam bifariam in O, & ſumendo partes æquales PM. & QN ipſis OM & ON, neque concurrent PM & QN, neque ſi jungatur PQ recta, atque in R. dividatur bifariam, partesque PS & QT ſumantur æquales PR & QR, ipſæ PS & QT concurrent. Neque enim duo latera ejusdem trianguli rectilinei reliquo vel minora vel æqualia eſſe poſſunt, ſed neceſſario ſunt majora. Atque illud ſicut ſemper & in omnibus rectis lineis verum eſt, ita etiam manifeſtum reddit lineas rectas in infinitum dividi poſſe, eisdemque in infinitum partes detrahi & auferri. ſicut lineis AC & AB, partes CF. FK. KM. MP. PS. SX. Xα. αδ. & BH. HI. IN. NQ. QT. TY. Yβ. βε. & ſic in infinitum progrediendo, detrahuntur. Lineæ verò quæ inter FH. KI. MN. PQ. ST. XY. αβ. δε. & ſic in infinitum ducuntur, etiam bifariam in infinitum ſecantur. Si enim linearum intermediarum una dividi ulterius nequiret, non dicam quoad ſenſum, ſed quoad intellectum; tum linea ulterius non eſſet, ſed illud quod Mathematici punctum appellant, cujus pars nulla. Si vero punctum eſſet, tum lineæ quæ ad latera ſunt concurrerent. ut verbi cauſa ſi quis

 dice-

Digitized by Google

diceret lineam δε non poſſe ſecari, non ergo linea eſſet, ſed punctum: adeoque αδ & βε in eo puncto concurrerent, & cũ αβ triangulum facerent. At αδ æquatur dimidiæ αβ, & εβ etiam æquatur dimidiæ αβ, ideoque tota αβ æquatur duobus lateribus ejusdem trianguli rectilinei αδ & βε quod eſt abſurdum. Non concurrunt ergo αδ & εβ. ideoque neque punctum illic eſt, ſed linea εδ: quæ ideo ſecari in partes poteſt. Atq; hoc ita in infinitum procedit.

Quod ſi dicatur non poſſe in infinitum partes auferri à lineis AC&AB, ſed lineæ quidem AB, poſt ablatam ultimo loco εβ, ipſi vero AC, poſt ablatam δα, nihil ultra tolli poſſe: nihil ergo ex lineis AC & AB reſiduum erit. quamdiu enim aliquid eſt, tolli poteſt. quod vero non eſt, neque tollitur: ergo terminus & extremum lineæ AC erit in δ. & AB. in ε. Quoniam ergo dictum fuit principio lineas AB & AC concurrere circa extrema verſus A. ergo concurrent circa δε: adeoque & lineæ αδ & βε. partes linearum AC & AB concurrent circa δ.ε. Unde triangulum erit conſtructum ex δα αβ & βε. ſed δα eſt dimidium ipſius αβ, & βε etiam dimidium ipſius αβ: ergo latus unum trianguli rectilinei αβ erit æquale binis ejusdem trianguli lateribus, quod eſt abſurdum. Non ergo concurrent CA & BA circa pun-

Digitized by Google

puncta δ.ε. ideoque iſta puncta neque eorum extrema ſunt. unde adhuc aliquid ipſis auferri poteſt. Et hoc ita in infinitum procedit.

Ex quibus manifeſtè demonſtratum eſt, primo, lineas rectas in infinitum dividi poſſe; & à quacunque linea recta ſemper partem aliquam poſſe auferri: ſecundo, duas rectas concurrentes ſe invicem in puncto neceſſario contingere.

Cum enim AC & AB non concurrant in eo quod dividi poteſt, ſed indiviſibili: ergo concurrunt in puncto. At quandiu pars dimidia lineæ intermediæ lineis vel AB vel AC demi poteſt, non concurrunt. Partes enim quæ demuntur, æquales ſunt lineæ intermediæ: ideoque ſi concurrerent, triangulum rectilineum haberet unum latus reliquis duobus lateribus æquale, quod eſt abſurdum. At lineæ AB, AC in infinitum dividi poſſunt, parteſque iis in infinitum detrahi: ergo neque in infinitum concurrere poſſunt, quatenus lineæ ſunt, hoc eſt diviſibiles: ſed neceſſarium eſt, ut concurſus fiat in indiviſibili, hoc eſt in puncto.

Habemus ergo neceſſario aliquid indiviſibile quod nullo modo dividi poteſt: & habemus præterea illud qnod in infinitum dividi poteſt. Neque enim ulla in recta linea diviſio concipi poteſt, quin ſtatim alia harum partium diviſio ſequatur. Si enim id non eſſet concurrerent latera, & per conſequens triangulum conſtituerent cujus duo latera tertio æqualia. Nulla ergo linea quamvis in infinitum dividatur, in puncta divi-

dividetur. Neque ulla tam minuta lineæ pars ſumi poteſt, quæ, quàmvis in centum mille partes ſecetur, unquam punctum fiet. Si enim fieret, tum eſſet indiviſibile: at ſi indiviſibile, ulterius dividi non poſſet. Ergo linea in infinitum non divideretur. At demonſtratum & lineam in infinitum dividi. Cum ergo linea in puncta dividi non poſſit, neque ex punctis componitur. Ex quo enim aliquod componitur, in idipſum reſolvitur ac dividitur. At linea in puncta nullo modo dividitur: ergo neque ex punctis componitur. Punctus quidem unicus fluens aut motus gignit lineam: non tamen jungendo ſe cum aliis punctis, ſed ſimpliciter motum ſuum peragendo. In quacunque ergo linea, infinita puncta ſumi poſſunt. Nam omnis diviſio fit in puncto. ergo, cum cujuscunque lineæ infinitæ ſint diviſiones, etiam infinita in quacunque linea erunt puncta. Neque in majore longioreve linea plura erunt puncta quam in breviori & minori. Quod ut intelligatur, ſequenti capite demonſtrationem quandam Geometricam hujus rei proponemus.

CAP. VII.

Suppono in hac demonſtratione circulum, ſi ſuper planum æqualiter ac perpendiculariter circumvolvatur, et ad eaſdem ſemper partes, à puncto quodã in peripheria usque ad idem punctum, deſcribere lineam rectam æqualem circuli peripheriæ: quod etiam quivis ſatis per ſe intelliget, modo figuram n. 4. paulo diligentius inſpexerit. Circulus enim ABD concipiatur de-

devolvi in plano quodam perpendiculariter, motu æquali, ad easdem ſemper partes verſus HC: dico eum quidem in hoc plano deſcribere lineam rectam AC. Circumvolvatur circulus usquedum B tangat lineam AC v. g. in L, dico AH æqualem eſſe ipſi AB. Eodem vero modo circumvolvatur circulus EGPO ſuper EH, ita quidē ut G tangat lineā EH, in puncto I. Recta ergo EI. minor erit quam recta AL. Etenim cum peripheria circuli ABD major ſit, quam peripheria circuli EGPO: major etiam erit recta, æqualis peripheriæ circuli ABD, quam recta æqualis peripheriæ EGPO. & per conſequens, quadrans illius major quadrante hujus. EI. ergo recta linea deſcripta à quadrante peripheriæ circuli EGPO minor eſt, quam AL recta deſcripta à quadrante circuli ABD. Sit nunc OPGE circulus inſertus circulo ABD, ita ut uterque ſuper eodem centro F ſimul circumgyrentur. Promoveatur ABD circulus verſus C. in plano AC. etiam EGPO promovebitur eodem tempore in plano EH, deſcribens lineam EH. Neque peripheria circuli EG unquam diſcedet à recta EH, non magis quam peripheria AB à recta AC. At ubi quadrante majoris circuli peracto, punctum B fuerit in L: centrū circuli F erit in K. per XIX. III. Elem. recta enim KL eſt perpendicularis ipſi AC. Ergo FB faciet lineam KL. & per conſequens G erit in R. Linea ergo circularis EG. deſcribet lineam ER. Si ergo linea ex punctis componitur: quot igitur puncta in linea EG tot etiam erunt in ER. ſemper enim EG tangit ER in pun-

puncto 11 ideoq; ſicut hujus puncta mutantur, ita etiam illius puncta mutantur, adeoque ſingula puncta EG tangent ſingula puncta ER. Et quoniam EG incipit cum linea ER in puncto E, & terminatur cum linea ER in puncto R, ſeu G: ergo quot puncta fuerint in EG, tot etiam erunt in ER. Sed eodem modo, quando EG decurrit in plano EH, non moto circulo ABD, deſcribet lineam EI. ergo, quot puncta fuerint in EG, tot etiam erunt in EI. nam incipiente EG incipit EI: & terminante EG, terminatur EI. & ſemper quamdiu EG ſuper EI movetur, tangunt ſe invicem in puncto. quot ergo puncta fuerint in una linea, tot erunt in altera. Sed antea diximus tot puncta eſſe in ER quot in EG. ergo tot erunt in ER quot in EI. Ergo linea maxima tot habebit puncta qvot minima. Verum ſi linea ex punctis eſſet compoſita: ergo qvo plura puncta linea haberet, eo major eſſet: & quo pauciora, eo minor. quod tamen non fit. Ergo linea ex punctis non componitur.

Atque ex his refutatur alterum Sexti argumentum. Εἴγε μὴν σφαῖρα καθ' ἓν σημεῖον ἀξιοῦται τῆς ἐπιπέδου ἅπτεσθαι, ἐκκυλιομένη τε γραμμὴν ποιεῖν, δῆλον ὡς ἐπικαταπιπτόντων σημείων τὴν ὅλην συντεθέντων γραμμήν, τοίνυν εἰ τοῦ μεγέθους τῆς γραμμῆς συμπληρωτικόν ἐστι τὸ σημεῖον, ἕξει καὶ αὐτὸ μέγεθος. συγκεχώρηται δὲ τοῦ μεγέθους τῆς γραμμῆς συμπληρωτικὸν αὐτὸ τυγχάνειν· καὶ αὐτὸ ἄρα μέγεθος ἕξει καὶ οὐκ ἀδιάστατον γενήσεται. *Si enim probetur ſphæram in uno puncto planum contingere, & circumrotatam, lineam deſcribere: manifeſtum*

eſt

eſt, quod cum inſequentia ſe invicem puncta totam lineam componant, ipſum quoque punctum magnitudinem habeat, quandoquidem lineæ magnitudinem expleat: Conceditur autem punctum explere magnitudinem lineæ; ergo & magnitudinem habebit, neque indiviſibile erit. Sed non conceditur punctum lineæ magnitudinem augere: ſi enim id verum foret; ergo quæ plura haberet puncta major linea eſſet, quam quæ pauciora: & vice verſa, linea major plura haberet puncta quam minor. Verum iſta omnia ex adducta antea demonſtratione refutantur Eadem enim circuli portio EG deſcribit lineam EI. & lineam ER. ergo æqualia numero puncta iſtæ duæ lineæ haberent, & ex doctrina Sexti æquales eſſent: quod tamen falſum eſt. ER enim multo major eſt quam EI. Non ergo punctum auget magnitudinem lineæ; neque eſt lineæ pars. quomodocunque enim linea ſecatur, & in quotcunque partes, nunquam partes lineæ erunt puncta, ſed lineæ, quamvis minutiſſimæ: quandoquidem linea in infinitum ſecatur, adeoque in infinitum progrediendo partes lineæ ſemper ſunt diviſibiles; punctum vero nulla ratione eſt diviſibile, ut antea eſt demonſtratum.

Mirabilis ſane eſt hæc indiviſibilium & in infinitum diviſibilium natura, quæ limites humani ingenii excedit. Quippe intellectus noſter ſicut natura ſua finitus eſt, ita infinita minime capit: quod alio quodam non inutili exemplo illuſtrabo, quo Galilæus Galilæi inſignis ſummoque ingenio præditus Mathematicus,

Digitized by Google

in ſuis demonſtrationibus de motu locali &c. uſus eſt. Ex principiis Arithmeticis conſtat poſſe numerum quemcunque in ſe multiplicari. Numerus autem in ſe ductus dat quadratum: ipſe autem numerus radix vocatur. Cum ergo omnis numerus poſſit ex ſe quadratum generare, ergo omnis numerus alicujus quadrati radix erit. Quot vero radices ſunt, tot etiam dantur quadrata: quævis enim radix ſuum habet quadratum. Si enim radix in ſe multiplicetur generat quadratum. Dicendum ergo foret, quot ſunt numeri, tot etiam ſunt radices. Nullus enim dari poteſt numerus qui non poſſit in ſe duci, adeoque quadratum ex ſe progignere. Quot ergo ſunt numeri, tot etiam ſunt radices. At vero quot radices, tot etiam ſunt quadrata. Ergo quot numeri ſimplices, tot etiã ſunt quadrati. At hoc ultimũ verum non eſt. Ab unitate enim usque ad denariũ incluſive, decẽ quidẽ ſunt numeri ſimplices, ſed duo tantũ quadrati, quaternarius nempe & novenarius, vel numerando unitatẽ, qui ſui ipſius quadratum efficit, tres. Ab 11 porro ad 100 numeri quidem ſunt 90 ſimplices, ſed quadrati tantum ſeptem. nempe, 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100. adeoque inter unitatem & centenarium incluſive numeri quidem erunt 99. quadrati vero ſine unitate 9. cũ unitate 10. Inde autẽ ad 1000. numeri ſimplices ſunt 900: quadrati autẽ ſolummodo viginti & unus, hoc eſt in mille numeris, quadrati triginta & unus. Porro in decẽ mille numeris ubi ad myriadẽ aſcendimus, quadrati tantum ſunt centum. Quod ſi numeri,

Digitized by Google

qui 10000 excedunt usque ad 1000000 incluſivè, ſumantur, erunt illi quidem 990000, quadrati autem nongenti, adeoque in ſimplicibus numeris 1000000, quadrati erunt 1000. Inter numeros ergo ab unitate ad centenariũ vix tertia pars eſt quadratorum. Ab unitate verò ad centenarium, pars decima eſt quadratorum. A centenario ad millenarium, quadrati partem ſimplicium numerorum explent quadrageſimam quintam, ab unitate autem ad millenarium partem fere triceſimam ſecundam. A millenario ad myriadem, pars centeſima quinquageſima ſexta eſt quadratorum, ab unitate autem ad myriadem pars centeſima. Denique à myriade ad millionem (ut vocant) pars tantum milleſima & centeſima quadratos habet numeros, ab unitate vero ad millionem pars milleſima. Numeri ergo ſimplices decadis, triplo plures ſunt quam quadrati: & Hecatontadis, decuplo plures: Chiliadis autem, trigecuplo: Myriadis vero, centuplo. Denique in millione ut vocant ſeu myriade myriadum, numeri ſimplices millecuplo plures ſunt quam quadrati. Atque ſi in infinitum progrediatur, quo plures numeri; eò ſemper pauciores quadrati. Id ergo quod ex clara, ut videtur, certaque ratione pro certo veroque concluditur, verum tamen non eſt. Alia enim eſt natura finitorum alia infinitorum. Si enim ſimplex numerus res finita foret, ita ut dari poſſet ultimus numerus ſimplex quo alius major non eſſet: tum etiam dari poſſent totidem numeri quadrati. Si enim diceretur millenarium o-

Digitized by Google

nium numerorum ſimplicium maximum eſſe, ut hoc nullus major daretur, tum omnes numeri ſimplices mille omnino eſſent, iidemque omnes radices, qui in ſe multiplicati mille quadratos generarent, & ſi quadrati cum ſuis radicibus multiplicarentur, mille prodirent cubi, & ſic mille quadrato quadrati, & mille cubocubi.&c. Sed non ita eſt: numerus enim in infinitum augeri poteſt, neque aliquis ſumi, qvin eo major detur. Quod ſi ad cubos, quadratoquadratos, cuboquadratos, cubocubos, cæterosque ejus generis numeros progrediamur, argumentum quidem eodem modo verum videbitur: ſed re & opere falſum eadem via deprehendetur. Quot enim numeri, tot radices: nullus enim numerus eſt, qui non in ſeipſum multiplicari poſſit, adeoque quadratum ex ſe gignere. At quod quadratum ex ſe generat radix eſt. Sed eodem modo poteſt etiam omnis radix cum ſuo qvadrato multiplicari, unde naſcitur cubus. Cum ergo omnis radix habeat ſuum quadratum, omne autem qvadratum cum ſuo radice multiplicatum cubum generet: ergo quot radices, tot cubi. At vero propoſitum fuit tot eſſe radices, qvot numeros: omnis enim numerus in ſe multiplicari poteſt & qvadratũ generare. Adeoq; omnis numerus eſt alicujus qvadrati radix. Ergo qvot numeri ſunt, tot etiam cubi erunt. Porro radix ducta in cubum dat biqvadratum ſeu qvadratũ in ſe ductum, qvartive ordinis numerum. Rurſus radix in hunc ducta, dat numerum qvinti ordinis: & in hunc ducta ſexti: atq; ſic in infinitum progredi-

Digitized by Google

diendo. Quot igitur radices, hoc eſt qvot ſunt numeri ſimplices, tot qvadrati, tot cubi, & tot qvarti, imo qvinti, ſextiqve ordinis numeri, atqve ſic in infinitum. At vero hoc falſum eſt. Quadrati enim longe pauciores ſunt quã numeri ſimplices, ut jam demonſtratum fuit: cubi vero his pauciores; qvarti verò qvinti & ſexti ordinis numeri longe adhuc pauciores. In decade enim unus tantum cubicus eſt numerus, nempe octonarius, præter unitatem qvi ſui ipſius cubus eſt: qvarti, qvinti, ſextive ordinis nullus eſt, niſi pro his omnibus unitatem ponas. Si enim unitatem centies in ſe multiplicaveris, hoc eſt unitatem centum vicibus multiplicaveris per unitatem, ſemper prodit unitas. In Hecatontade autem cubici numeri ſunt tres, nempe 8. 27. & 64. qvibus ſi unitatem addas erunt qvatuor. Quarti ordinis tres omnino ſunt 1. 16. 81. Quinti & ſexti ordinis præter unitatem unicus tantum in unoqvoqvis eſt, 32. in V. & 64. in VI. In Chiliade cubici qvidem numeri cum unitate decem, qvarti vero ordinis qvinqve 1. 16. 81. 256. 625. qvinti ordinis tres. 1. 32. 243. ſexti ordinis totidem. 1. 64. 729. Porro in Myriade cubici qvidem numeri erunt 21. qvarti vero ordinis 10. qvinti ſex. & ſexti ordinis qvatuor, una cum unitate, qvæ in cæteris etiam numeratur. Adeoqve qvo major numerus fuerit, eo pauciores, reſpectu numerorum ſimplicium, ſunt qvadrati, & adhuc pauciores cubi, & multo adhuc pauciores qvarti, qvinti, ſextiqve ordinis numeri. Et qvo longius ab unitate recedas, tanto plures erunt

Digitized by Google

numeri irrationales, qvam qvadrati: & qvadrati, qvam cubi: & deniqve cubi, qvam qvarti ordinis numeri: & ſic in infinitum. Et tamen verum eſt, omnem numerum poſſe in ſe multiplicari, & iterum in productum, & iterum in productum, & iterum in productum, atqve ſic in infinitum. Adeoqve etiam certum eſt nullum plane numerum dari, qvin ſit radix alicujus qvadrati: tum qvoqve radix alicujus cubi: & porro radix alicujus numeri qvarti, qvinti, ſextive ordinis. Certum præterea eſt omnem radicem quadratam ſuum habere numerum qvadratum: ideo enim radix vocatur qvod in ſe ductus numerus qvadratum generet. Omnem qvoqve radicem cubicam ſuum habere cubum: & radicem qvarti ordinis ſuum habere biquadratum: & qvinti ordinis ac ſexti eodem modo, atqve ſic in infinitum. Si ergo omnis radix qvadrata ſuum habet qvadratum ergo qvot radices, tot qvadrati: & qvot radices cubicæ, tot numeri cubici, & ſic in infinitum. Sunt autem omnes omnino numeri radices qvadratæ, & cubicæ, & qvarti, qvinti, ſextiq; ordinis numerorum &c. Nullus enim numerus eſt, qvi hos omnes ex ſe generare non poſſit. Quot ergo numeri, tot radices, tot qvadrati, tot cubi, tot biqvadrati, tot bicubi. Nempe, ſi ullo certo numero definire velim, fallor; neqve ullo modo dicere poſſũ, qvot vel numeri ſint, vel radices, vel qvadrati, vel cubi &c. ſed recte & vere dico eſſe numero infinitos. Adeoqve infinitum numerum eſſe, in qvo, tot ſunt qvadrati, qvot numeri: tot cubi, qvot numeri: tot

qvin-

Digitized by Google

qvinti, ſexti ordinis numeri, qvot numeri ſimplices. Quo qvidem modo, inter omnes intellectu noſtro comprehenſibiles numeros, ſola unitas erit numerus infinitus, eritq; & radix, & qvadratum, & cubus, & biqvadratum, & bicubus, & qvocunq; demum progredi voluerimus. Naturam enim habebit omnibus his convenientem. Quadrati enim numeri hanc habent proprietatem, ut ſemper inter ſe unum habeant medium proportionalem: Cubici vero duo: quarti autem ordinis tres: qvinti ordinis qvatuor: ſexti ordinis qvinq; & ſic in infinitum. Sic inter 9 & 16. duos numeros qvadratos, datur medius proportionalis 12. Inter 4 & 81. duos etiam qvadratos, medius proportionalis datur 18. Porro inter duos numeros cubicos 27. & 64. duo medii proportionales dantur. 36. 48, Sic inter qvarti ordinis numeros 81. & 256. tres dantur medii proportionales 108. 144. 192. & ſic in cæteris. At vero inter unitatem & qvadratum qvemcunq; numerum, etiam datur media proportionalis: ut inter 1. & 81. qvadratum 9. datur medius proportionalis 9. inter 1. & 64. cubum dantur duo medii proportionales. 4. 16. inter 1. & 81. qvarti ordinis numerum dantur tres medii proportionales. 3. 9. 27. & ſic in aliis omnibus. Qvocirca, unitas naturam omnium cujuscunqve ordinis numerorum habebit: & qvod neqvicqvam in infinitum progrediendo qværimus, id in ſola unitate inter omnes noſtro intellectu comprehenſibiles numeros, invenimus.

Qud

Quid divina ſcrutamur myſteria, & æterna ac infinita anguſtis intellectus noſtri limitibus circumſcribimus? Hæc ſane in clariſſimis ac cuivis maxime obviis principiis fundantur:& tamẽ qvando ut infinita & indiviſibilia conſiderantur, à noſtro intellectu percipi minime poſſunt. Quis hoc intelliget? tot radices eſſe qvot numeros: tot qvadratos, cubos, biqvadratos, bicubos, &c. qvot radices; adeoq; qvot numeros:& tamẽ in mille numeris ſimplicibus,qvadratos tantum eſſe 31.cubos decẽ: qvarti ordinis, qvinq;: qvinti ordinis, tres: decimi vero ordinis, tantum unum,ipſam nempe unitatem. Si tot ſunt cubi, & qvadrato qvadrati &c. qvot numeri: ergo in mille numeris,mille cubi erunt, mille biqvadrati: vel etiam mille erunt unum,& decẽ unum,& tria unum. Qvid abſurdius his dici poſſet? & tamen tales abſurditates committere cogimur, qvando infinita ad finitorum rationes examinamus. Qvid mirum igitur eſt? non poſſe intellectum noſtrum comprehendere qvomodo infinitus ille & incomprehenſibilis Deus & unus ſit & trinus: qvomodo idem in ſua æternitate omnia agat: milleqve anni ſint ipſi ac unus dies: & cum ubiqve ſit, nusqvam tamen comprehendatur? Quid mirum, ſi nulla ratione aſſeqvi poſſimus, qvomodo is qvi omnia continet,omnia ſuſtinet, idem in utero virginis ſuſtineatur:certis, in terra locis, circũſcribatur, in cruce ſuffigatur? Si enim iſta qvæ manifeſtis principiis nituntur, minime capi à nobis poſſint; eo qvod ſint in finita: qvanto minus ea comprehendemus

qvæ

Digitized by Google

qvæ non tantum ſunt infinita, æterna ac incomprehenſibilia, verum neq; ullo modo cognoſci aut inveſtigari qveunt, ex natura cognitis principiis: ſed divina tantum gratia revelantur. Fungos profecto aut inſanos ſophiſtas oportet eſſe eos, qvi cum videant in rebus pure naturalibus nihil ſe intellectu ſuo dignoſcere ubi ad infinita ventum eſt, in divinis rebus & qvæ omnem intellectus capacitatem longe excedunt, majora & certiora ſibi polliceri audent, auſuq; non dicam temerario ſed plane furioſo ac Diabolico, ea omnia in dubium vocare, imo falſi arguere conantur quæ infirmâ & cæca ratione ſua perſpicere nequeunt. Anne ergo Sol aut lux non erit quod cæcus iſta videre nequeat? an omnes ſoni pro nihilo habebuntur, quod ſurdus hos non exaudiat? Sed vero ſi iſti hæc negarent, facile cæteri mortales eorum inſaniam dijudicarent, eo quod maxima hominum pars organa ab ipſa natura habeat ad hæc dignoſcenda: illorum vero ſtultitia, qui humanæ rationis modulo divina metiri volunt, eaque negare quæ intellectu non percipiunt, non quidem tam clare ab omnibus cernitur; cum omnium hominum ingenia his limitibus à natura ſint circumſcripta, ut infinita capere nequeant. Et homo tamen ambitioſiſſimum animal omnia ſe intelligere ac ratione comprehendere poſſe perſvadet, ſuæque ſapientiæ limites ultra terminos à natura poſitos proferre non dubitat. Sed vertant huc illi animum atque oculos, & ubi in minimis hiſce ac vulgaribus rebus didicerint quam cæci ſint &

omni plane ratione deſtituti; quando de infinitis, etiam quæ in natura conſiderantur, judicium erit ferendum: demum divina debita reverentia venerentur, fideque apprehendant quæ ratio non percipit, ut demum eo fruantur, qui cum omnia contineat, nullas tamen partes habet: ſed totus in omnibus omnia implet.

CAP. VIII.

Et Sexti quidem argumenta præcipua contra puncti Geometrici definitionem huc usq; examinavimus: duo tamen adhuc reſtant paucis attingenda. Primum eſt quod punctum ſit pars lineæ: alterum quod ſit in loco. ex utroque colligit non eſſe indiviſibile ſed diviſibile. De primo quidem ita ait Καὶ μὴν εἴπερ ὄψις τῶν ἀδήλων ἐστὶ τὰ φαινόμενα, ἐπεὶ οὐ δυνατὸν ἐν τοῖς φαινομένοις λαβεῖν τινος σημεῖον καὶ πέρας ἀδιάστατον, δῆλον ὡς οὐδὲ ἐν τοῖς νοητοῖς ληφθήσεταί τι τοιοῦτον. Ἐν δέ γε τοῖς αἰσθητοῖς οὐδέν ἐστιν ἀδιάστατον λαβεῖν, ὡς παραστήσομεν, ὥστ' οὐδὲ ἐν τοῖς νοητοῖς. Πᾶν τοίνυν τὸ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς ὑποπῖπτον τινὸς πέρας καὶ σημεῖον, σὺν τούτῳ καταλαμβάνεταί τινος ἄκρον σὺν τῷ καὶ μέρος ἐκείνου οὗπερ ἐστὶν ἄκρον, ὑποπίπτειν. Ἐὰν γοῦν ἀφέλωμεν αὐτό, μειωθήσεται τὸ ἀφ' οὗ ἡ ἀφαίρεσις. Τὸ δὲ μέρος τινὸς ὑπάρχον, εὐθὺς καὶ συμπληρωτικὸς αὐτοῦ καθέστηκεν. Ὃ δὲ ἐστὶ τινὸς συμπληρωτικὸν πάντως αὔξει τὸ μῆκος ἐκείνου, καὶ ὃ ἐστὶ μεγέθους αὐξητικόν, τοῦτο ἐξ ἀνάγκης ἔχει μέγεθος. Πᾶν ἄρα τὸ ἐν αἰσθητοῖς σημεῖον τι-

νὸς

νὸς καὶ ἄκρον μέγεθος ἔχον, οὐκ ἔστιν ἀδιάστατον. ὅθεν εἰ καὶ τὸ νοητὸν μεταβατικῶς ἀπὸ τοῦ αἰσθητοῦ νοοῦμεν, σὺν τούτῳ καθεστὼς σημεῖον καὶ πέρας γραμμῆς, αὐτὸ νοησομεν σὺν τῷ καὶ πληρωτικὸν αὐτῆς ὑπάρχειν, ὥς τε καὶ αὐτὸ διάστασιν ἕξει πάντως, ὅγε διαστάσεως ἐστι περιποιητικόν. *Præterea cum ea quæ manifeſta ſunt, cernuntur per ea, quæ apparent, quoniam in iis quæ apparent, ſumi non poteſt alicujus ſignum & finis quod ſpatio careat ac dimenſione: perſpicuum eſt quod nec in iis quidem quæ cadunt ſub intelligentiam ſumetur quidem ejusmodi. In ſenſibilibus autem nihil poteſt ſumi quod non intervallum habeat ac dimenſionem, ut oſtendam: quamobrem neq; in iis quæ cadunt ſub intelligentiam. Cui ergo in ſenſibilibus accidit terminum alicujus eſſe & punctum, illi etiam accidit, & extremum alicujus eſſe, & partem illius cujus eſt extremum. Quod vero pars alicujus eſt, etiam ipſum complet: quod antem aliquid complet, omnino auget ipſius longitudinem. & quod magnitudinem auget id omnino eſt magnitudo. Omne ergo quod in ſenſibilibus eſt punctum, & alicujus extremum, dimenſione non caret. quippe magnitudinem habens. Unde etiam ſi id quod cadit ſub intelligentiam tranſeundo ex ſenſili iutelligimus, cum eo intelligimus, etiam ipſum punctum, & lineæ eſſe extremum, & ſimul eam implere: ideoq; dimenſionem habere, ſi quidem eandem acquirit & efficit.* Sed ſtultiſſimum eſt velle de iis rebus quæ ſub ſenſum non cadunt ex ſenſuum judicio argumentari. Si enim ſenſu-

um judicio ſtandum foret, utique Sol vix bipedalis eſſet; imo unius tantum pedis magnitudiuem æquaret. Tum quoque infinitos errores committeremus in rebus etiam manifeſtis, ſi quæ ſenſibus apparent ſine omni rationis examine, pro veris recipi deberent. A ſenſibilibus ergo ad intelligibilia argumentari, eſt plane inſulſum. Ponit præterea dari aliquod punctum ſenſibile: quod falſum omnino eſt. Quicquid enim ſenſibus apprehenditur quamvis minutiſſimum, tamen nec linea eſt, nec punctum: ſed ſuperficies. Verum ut Geometricè procedamus, clara demonſtratione manifeſtum faciemus, extremũ & terminũ ſuperficierum imo ſolidi alicujus ſeu corporis, partem illius minime eſſe cujus eſt extremum: quod Sexto plane contrarium eſt. Sumatur in figura n. V. ABC recta linea ſecta bifariam in B. & centro B intervallo AB deſcribatur ſemicirculus ADC,& eodẽ centroB,interuallo autẽ EB, minori quam AB,deſcribatur circulus EXF. Extruatur ſuper AB quadratũ AD.& ſuper BC quadratũ BI.eodẽ modo ſuper EB&BF conſtruantur quadrata BG & BH. eductisque diagonalibus BG.BK.BH.BI.jacebuntBK. BG & BH. BI, ſibi invicem in directum. moveatur nunc totũ planũ ACKI in gyrum ſuper axem BD. deſcribet ergo AK. vel CI. cylindrũ cujus altitudo AK, diameter ABC vel KDI: EG autem vel FH alium deſcribet cylindrum,cujus altitudo EG, diameter EF vel GH. Triangulum vero KBI. circumactum eodem motu ſuper axem BD. conum deſcribet cujus axis BD, baſis circulus deſcriptus ſuper diametrum KI. Trian-

gu-

gulum quoque BGH conum ſimiliter deſcribet cujus axis BX baſis circulus deſcriptus diametro GH. Denique in hac circumrotatione ADC ſemicirculus dimidiam ſphæram deſcribet cujus diameter erit AC: & EXF ſemicirculus etiam dimidiam ſphæram deſcribet, cujus diameter EF. Demantur utrinque portiones ſphæricæ, cono KBI plane intacto. hoc eſt, in minori hemiſphærio dematur totum ſegmentum ſphæricum quod conum BLR ambit, planoque EBL deſignatur. In majori autem hemiſphærio, auferatur ſegmentum ſphæricum quod cylindrum EG, & extremas partes coni BZ ambit, & plano AEGZ indicatur. Remanet ergo in majori cylindro, portio cylindrica qvæ repræſentatur plano AKD. In minori autem cylindro remanet portio cylindrica repræſentata plano EXG. Totus autem conus KBI manet integer, ſicut & conus BGHI. Secentur nunc portiones hæ cylindricæ & conus ipſe, plano quodam parallelo baſi majoris cylindri ſeu AB. verbi g. plano MN. erit ergo portio cylindrica quæ repræſentatur plano AMP, æqualis cono BLR. per ea quæ demonſtrata ſunt ab inſigni Mathematico Luca Valerio libro ſecundo de centro gravitatis ſolidorum Propoſitione XII. Sed per eandem demonſtrationem portio cylindrica repræſentata plano EOL, æqualis erit cono BLR. Atq; hoc in omni ſectione parallela verum eſt. Ubicunque enim portiones hæ cylidricæ una cum cono ſecantur, modo planum ſecans, baſi cylindrorum & coni, parallelum fuerit: ſemper portio cylindrica æqualis erit

ſegmento conico ſeu cono illi qvi à majore abſcinditur. Idque in omnibus partibus verum eſt qvamdiu ulla pars ſumpta fuerit. Cum ergo portio cylindrica repræſentata plano ELO ſit æqualis cono LBR: & port o cylindrica repræſentata plano APM æqualis ſit eidem cono LBR: erunt iſtæ duæ portiones cylindricæ inter ſe æquales. Et ſi ſectio in infinitum continuetur plano ad baſin parallelo, ſemper portiones cylindricæ inter ſe erunt æquales, utpote eidem cono æquales.

Præterea, ſuperficies plana quæ duobus circulis, quorum diametri ſunt LR. & OS. terminatur, cujus latitudo repræſentatur recta OL, & eſt baſis portionis cylindricæ EOL. æquatur plano circulari cujus diameter eſt LR baſis coni LBR. Cum enim BTL angulus ſit rectus, quadrata exſtructa ſuper LT & TB æquantur quadrato ſuper LB. hoc eſt ſuper EB vel OT. Æquatur autem latus LT lateri BT, angulus enim BTL rectus, TBL autem dimidius recti: unde TLB etiam erit dimidius recti. Quadtatum ergo ſuper LT. æquale erit quadrato ſuper TB. Unde quadratum ſuper OT æquale erit binis quadratis ſuper LT. Quatuor ergo quadrata ſuper OT hoc eſt quadratum ex OS. æqualia erunt octo quadratis ex LT. hoc eſt duobus quadratis ex LR. Sunt vero circuli inter ſe ut quadrata diametrorum. per. 11. XII. Element. Cum ergo quadratum ſuper OS. duplum ſit quadrati ſuper LR utpote æquale binis talibus quadratis, ergo & planum circulare cujus diameter OS. duplum erit plani circularis cujus diameter LR. ablatoque communi plano

cir-

Digitized by Google

circulari deſcripto ſuper LR diametro, remanet planum circulare repræſentatum recta OL, quod binis circulis deſcriptis ab LR & OS terminatur, æquale plano circulari ſuper LR deſcripto. Eſt autem circulus ſuper LR baſis coni. Planum vero circulare repræſentatum recta linea OL baſis portionis cylindricæ EOL. Baſis ergo portionis cylidricæ æquatur baſi coni. Atque hoc in omni ſectione parallela ad baſin verum eſt. Eodem fere modo demonſtratur baſin portionis cylindricæ APM. æquari baſi coni LBR. Iunctâ enim PB rectâ, erit quadratum deſcriptum ſuper PB æquale quadratis ſuper PT. TB. hoc eſt quadratis ſuper PT & TL. quandoquidem BT. & TL intet ſe ſunt æquales, ut antea dictum. Eſt vero PB æqualis AB utpote ejusdem circuli radius. AB autem æqualis MT oppoſito lateri ejusdem parallelogrammi MB. Unde PB & MT æquales erunt, & quadratum ſuper MT, æquale binis quadratis, uni ſuper PT, alteri ſuper LT. Unde quatuor quadrata ſuper MT, hoc eſt quadratum ex MN, æqualia erunt quatuor quadratis ex PT, hoc eſt quadrato ex PQ. & quatuor præterea quadratis ex LT, hoc eſt quadrato ex LR. Habent autem circuli eam inter ſe rationem quam quadrata diametrorum. Planum ergo circulare ſuper NM diametrum æquale erit plano circulari ſuper PQ diametrũ, & præterea plano circulari ſuper LR diametrum. Hoc eſt, planum circulare MN, excedit planum circulare LR, plano circulari PQ. Auferatur planum circulare PQ à plano circulari MN. remanet planum circulare

ter-

terminatum binis circulis deſcriptis ex MN & PQ diametris, quod repræſentatur MP. recta, eſtque illud æquale circulari plano LR. Atque hoc in omni ſectione parallela ad baſes coni & cylindri verum eſt. Eſt vero planum circulare ſuper MP, baſis portionis cylindricæ AMP. Circulus autẽ ſuper LR baſis coni LBR. Baſis ergo portionis cylindricæ in omni ſectione parallela ad baſes coni & cylindri, æquatur baſi coni. Antea vero demonſtratum fuit baſin circularem OL portionis cylindricæ GEL æquari eidem baſi coni nempe circulo ſuper LR. ergo æquatur etiam baſi circulari MP portionis cylidricæ MAP. Idque in omni ſectione ad baſes parallela verum eſt. Si ergo portiones hæ cylindricæ in infinitum plano ad baſes parallelo ſecentur; & conus quoque eodem modo ſecetur: erit quævis portio cylindrica cono æqualis, & ipſæ portiones cylindricæ inter ſe æquales, denique cujusvis portionis cylindricæ baſis reſpondentis ſibi coni baſi æqualis, & baſes portionum cylindricarum inter ſe æquales. Adeoque ſi totus cylindrus ACIK plano μ.ν ſecetur, erit portio cylindrica repræſentata plano μAα æqualis portioni cylindricæ γEβ. & ſingulæ harum æquales cono δBε. baſesque ſingularum inter ſe æquales, nempe planũ circulare repræſentatum linea μα æquale plano circulari γβ, ſingulaque plana æqualia circulo δε. Ita ζηA & θιE ſunt inter ſe æquales, baſesque æquales habent, ſingulæque harum æquales cono κBλ, baſesque ſingularum æquales baſi coni ſeu circulo ſuper κλ. Quamdiu ergo illæ partes aut cylindricarum portio-

tionum, aut coni remanſerint, tamdiu etiam inter ſe æquales erunt, modo ut antea dixi. Decreſcendo autem cylindricæ hæ portiones terminantur in circulo, & majoris quidem cylindri portio, in circulo deſcripto ſuper AC. minoris vero cylindri portio, in circulo deſcripto circa EF. Conus autem terminatur in puncto B. Si ergo extrema hæc ſeu termini horũ corporum ac ſuperficierum, partes revera eſſent, quod ſupponit Sextus; utique circulus AC æqualis eſſet puncto B: etiam circulus EF æqualis eſſet puncto B: & ipſimet circuli AC & EF inter ſe eſſent æquales: quod eſt abſurdum. Quomodo enim ſemicirculus ADC æqualis eſſet puncto B? aut ſi indiviſibilium ratio haberi nequeat, quomodo ſemicirculus ADC æqualis eſſet ſemicirculo EXF? At ſi integri circuli, ex AC & EF deſcripti, æquales eſſent: etiam ſemicirculi invicem æquales forent. Extremum ergo corporis alicujus, ſive linea ſit, ſive punctum; pars non eſt. quod erat demonſtrandum.

Alterum Sexti argumentum eſt, quod punctus ſit in loco. Ἀλλ᾽ εἰώθασι inquit πρὸς τὰς τοιαύτας ἐπιχειρήσεις ὑπαντῶντες οἱ περὶ τὸν Ἐρατοσθένη λέγειν, ὅτι τὸ σημεῖον οὔτε ἐπιλαμβάνει τινὰ τόπον, οὔτε καταμετρεῖ τὸ διάστημα τῆς γραμμῆς, ῥυὲν δὲ ποιεῖ τὴν γραμμήν, ὅπερ ἐστὶ ἀδιανόητον. ῥεῖν γὰρ νοεῖται τὸ ἀπό τινος τόπου εἴς τινα τόπον ἐκτείνεσθαι ὥσπερ τὸ ὕδωρ. *Sed ejusmodi argumentis occurrere ſolent Eratoſthenei & dicere, quod punctum neque ullum occupat locum*

 cum

cum; neq; metitur ſpatium lineæ; ſed fluens facit lineam: quod quidem eſt ejusmodi, ut ne cogitari quidem poſſit. Fluere enim dicitur ab aliquo loco in aliquem locum extendi, ſicut aqua. Sed male rurſum argumentum à ſenſibilibus ad inſenſibilia, à corpore ad non corpus ducit. Nam quod corpus, cum fluit, locum mutat, inde non ſequitur, ea quæ non ſunt corpora, locum mutare fluendo. Imo quomodo locum ea mutare poſſunt quæ nullum habent? Eſt enim locus ſpatium vacuum corpore plenum. At ſi locus ſpatium eſt aliqua re plenum, punctum quidem in loco Phyſice loquendo non eſt. Nam cum nullas habeat dimenſiones, neque ſpatium implere poteſt. Quod ſi definitionem Ariſtotelis ſequamur, qua is definit locum circumſcriptionem continentis certe neque punctum in loco erit. Omnis: enim circumſcriptio fit vel lineis, vel ſuperficiebus. At id puncto non convenit: ergo nec ullo modo eſt in loco. Verum quidem eſt, punctum quando fluit, non ibidem manere ubi erat, ſed late loquendo, locum mutare. ut in fig. n. 4 punctum F quando movetur ab F in K, mutat ſane locum ſeu τὸ πȣ̃, aut ſuum ubi. Et ita quidem punctum eſt in aliquo loco ſeu ubi. Verum id non probat punctum eſſe corpus. Locus enim qui ſolis corporibus convenit eſt ſpatium ut antea dixi: id vero in quo punctum eſt, nullo modo ſpatium dici poteſt. Punctum quidem tranſeundo ſeu fluendo ſpatium aliquod in longum facit. Sed in ſpatio trinè dimenſo, ut loqvuntur Phyſici, non continetur, nec corpus eſt.

CAP.

Digitized by Google

CAP. IX.

Et hactenus Sexti dogmata examinavimus quæ contra Definitionem puncti protulerat: nunc ad ea, quæ de linea & ſuperficie dicit pergamus. Ac primum quidem negat, lineam eſſe puncti fluxum: quod neq; nos dicimus. Aliud enim eſt dicere linea eſt puncti fluxus: & aliud, linea fit ex fluxu puncti. Linea ergo neque punctum eſt quod fluit; neque fluxus puncti: ſed id quod fluxu puncti deſcribitur. Hoc ergo argumentum nihil contra Geometriæ principia concludit: ſicut neque illud quod ſubjungit, non eſſe lineam multa ſigna locata per ordinem. id enim antea demonſtravimus lineam non componi ex punctis, neque in puncta dividi poſſe. Fit enim linea, ex fluxu vel unius puncti, vel plurium. ſicut illa quæ in plano ex circum gyrato circulo deſcribitur, ex plurium punctorum fluxu naſcitur. Aliud enim eſt quod efficit lineam, aliud ex quo efficit. punctum enim efficit lineã, non ut materia lineæ, ſed ut inſtrumentum potius vel efficiens. Cum ergo hæc omnia contra Geometriæ principia lineæque definitionem nihil concludant: his miſſis ad ea pergamus quibus abſolute evincere conatur lineam non eſſe longitudinem ſine latitudine. Ait vero Σκεψάμενοι δὲ ἡμεῖς ἀκριβῶς οὔτε ἐν τοῖς νοητοῖς, οὔτε ἐν τοῖς αἰσθητοῖς εὑρήσομεν δυνάμενόν τι ληφθῆναι μῆκος ἀπλατές. καὶ ἐν μὲν τοῖς αἰσθητοῖς ἐπείπερ ὃ ἂν λάβωμεν αἰσθητὸν μῆκος, τοῦτο πάντη τε καὶ πάντως σὺν ποσῷ πλάτει ληψόμεθα. Ἐν δὲ

Digitized by Google

τοῖς νοητοῖς, καθ' ὅσον ἕτερον μὲν ἑτέρου στενότερον δυνάμεθα νοῆσαι μῆκος, ὅταν δὲ τὸ αὐτὸ μῆκος καθ' ἰσότητα φυλάττοντες, σχίσωμεν ταῖς ἐννοίαις τὸ πλάτος, καὶ ἄχρι τινὸς τὸ αὐτὸ ποιῶμεν, ἔλαττον μὲν τὸ πλάτος καὶ ἔλαττον γινόμενον νοήσομεν, ἐπειδὰν δὲ ἅπαξ φθάσωμεν στερῆσαι τοῦ πλάτους τὸ μῆκος, οὐκέτι οὐδὲ μῆκος φαντασιούμεθα, ἀλλ' ἀναιρεῖται καὶ ἡ τοῦ μήκους ἐπίνοια. *Si nos autem diligenter atque accurate conſideraverimus, neque in iis quæ cadunt ſub intelligentiam, neque in ſenſibilibus inveniemus ullam ſumi poſſe latitudinis expertem longitudinem. Et in ſenſibilibus quidem, quandoquidem quamcunque ſumpſerimus ſenſilem longitudinem, eam omni ratione & omnino ſumemus cum quanta latitudine. In iis autem quæ cadunt ſub intelligentiam, quod aliam quidem alia anguſtiorem poſſimus mente concipere longitudinem. Quando autem ex æquo eandem ſervantes longitudinem, cogitatione ſcindimus latitudinem; aliquatenus quoque idem facimus, ac latitudinem minorem ac minorem concipimus. Poſtquam autẽ ſemel eo pervenerimus, ut latitudine privemus longitudinẽ, tũ neq; longitudinẽ ulterius cõprehendimus, ſed ipſius etiã longitudinis cogitatio ſimul tollitur.* Sed quoniã Sextus longitudinẽ ſine latitudine concipere nequit; agedũ ex claris demonſtrationibus eam deducamus, atq; intellectui comprehendendam proponamus. Nam ſenſibus hæc velle percipere, id vero inſanum foret: cum non fallaci ſenſuum judicio ac cenſuræ: ſed acutiſſimi ingenii perſpicacitati hæc ſint committenda.

Sit

Sit ergo planum ABCD in fig. 6. ſuper hoc autem perpendiculariter erectũ ſit parallegrammũ rectangulũ AGEF. Aliud autẽ parallelogrammũ huic & quoad ſingula latera, & quoad angulos æquale, in hoc eodem plano ABCD ſit erectum perpendiculariter: ita quidem ut una extremitas FE tangat extremitatem parallelogrammi AGFE. dico extremitates horum parallelogrammorum tangere ſe inuicem in linea recta. Cum enim FE latus parallelogrammi AGFE ſit perpendiculare plano ABCD: ergo ſi ab altera plani parte, ab eodem puncto E, educatur recta linea, eidem plano ABCD perpendicularis; jacebunt iſtæ duæ lineæ ſibi invicem in directum per XIIII. Primi Elem. Rurſus cum latus FE parallelogrammi BHFE ſit perpendiculare eidem plano ABCD. ergo recta à puncto E ab altera plani parte educta ad rectos angulos, in directũ jacebit ipſi EF. Latus ergo parallelogrammi AGEF, una cum latere parallelogrammi BHFE, eidem rectæ in directum jacebunt, adeoque unam eandemque rectam lineam facient. (Euclides libro XI. propoſit. III. demonſtravit, ſi duo plana ſe invicem ſecent, communem ipſorum ſectionem fore rectam lineam. Sed alia methodo uſus eſt, illudque ſuppoſuit, quod nos nunc demonſtrare volumus, rectam nempe lineam omnis latitudinis eſſe expertem). Duo ergo hæc plana tangunt ſe invicem in recta linea: ideoque & planum ſeu parallelogrammum AGFE tanget planum ABCD in recta linea AE; & planum ſeu parallelogrammum BHFE tanget planum ABCD in recta linea BE. Sunt

vero AE & BE baſes tangentium ſe invicem parallelogrammorum: ergo ipſæ rectæ lineæ AE & BE ſe invicem tangent, angulumque rectilineum efficient AEB.

Quod ſi ſpatium inter BAHG alio parallelogrammo claudatur perpendiculari ad planum ABCD, v. g. plano ABHG, tanget quoque parallelogrammum, ſingula horum planorum, in recta linea ad AB. AG, & BH. quarum AB una cum BE & AG duos angulos efficiet: & tres AB.BE.EA. triangulũ. Tum quoq; HGF triangulum erit æquale AEB. triangulo. Cũ enim BA & HG latera ſint oppoſita ejusdem parallelogrammi; & HF & EB, & GF & EB etiam latera oppoſita ejusdem parallelogrammi: ergo tria horum triangulorum latera invicem æqualia erunt, adeoque tota triangula æqualia. Dividatur parallelogrammum AB HG bifariam recta KL. à parallelogrammo autem AGFE auferatur portio æqualis ipſi ALKG parallegrammo: & ſit parallelogrammum ablatum ab AGFE parallelogrammo, AGXO. Ab altero quoque parallelogrammo HBEF auferatur quoque parallelogrammum LBHK. quod ſit HBPM. Sunt autem AGXO & AGKL parallelogramma in eadem altitudine: ergo & baſes erunt æquales; adeoque LA æqualis AO. tum quoque LB æqualis erit BP. Quando ergo à parallelogrammis AGFE & BHFE auferũtur parallelogramma æqualia parallelogrammis AK. LH etiã à rectis AE & BC auferuntur rectæ AO & BP æquales rectis AL & LB baſibus parallelogrammorum ablatorum. Dico au-

autem parallelogramma AGXO & BPHM inclinare quidem invicem, nec tamen concurrere. Si enim concurrerent, utique & baſes eorum BP. AO. & ſummitates HM & GH ſe invicem tangerent. At vero tum lineæ iſtæ cum lineis GH & BA triangula duo ſimilia & æqualia facerent, in quibus duo latera non majora eſſent reliquo. BP enim & AO latera æqualia ſunt AL & LB lateribus, hoc eſt toti AB. Hoc vero eſt abſurdum. Cum ergo nec AO tangat BP nec GX tangat HM. neque planum AOGX tanget planum BHMP. Jungātur termini ipſorū PM.XO. plano parallelo ipſi HGAB.ſitq; planū illud parallelogrammū MPOX.dividatur hoc quoq; parallelogrammum bifariam in duo parallelogramma, ſingulisque horum, æqualia duo alia parallelogramma auferantur à parallelogrammis XOFE & MPFE, ſintque parallelogramma ablata XOQR & PMST. dico neque hæc parallelogramma poſſe ſe invicem tangere: niſi & lineæ OQ & PT ſe invicem tangant. At hoc eſt impoſſibile: latera enim OQ & PT tum triangulum cum OP facerent, in quo ambo latera ſimul ſumpta æqualia eſſent tertio: quod eſt abſurdum. Quod ſi ergo termini RSQT, parallelogrammo quodam jungantur, illudque dividatur bifariam,& æqualia ſemiſſi hujus parallelogramma utrinque auferantur: ne illa quidem ſe invicem tangent propter dictas cauſas. Superficiebus ergo AEGF & BHFE in infinitum partes demi poſſunt, ac parallelogrammum ABHG. in infinitum dividi. Si enim progrediendo ut cæptum eſt,eo quisquam veniret; (ut nō

quo-

Digitized by Google

quoad ſenſum, ſed quoad intellectum) nihil ultra ipſis parallelogrammis auferri poſſet: utique haberet eorum extrema. At in extremis ſe tangunt invicem. Si vero ſparallelogramma ſe contingunt; & lineæ AF. BF ſe contingent. Si vero ſe contingunt, faciunt utique, cum baſi proxime antecedentis parallelogrammi, triangulum, in quo duo latera erunt æqualia uni, quod eſt abſurdum. Atque hoc ex demonſtratione antea allata de puncto liquet. Concludo igitur ſuperficiem in infinitum dividi poſſe. Tum quoque duo parallelogramma nusquā in ſuperficie aut diviſibili in latitudine cōcurrere. Quādiu enim illic ſuperficies aut diviſibile eſt, tamdiu nō concurrunt. Concurrunt ergo in indiviſibili, ſeu in eo, quod nullam latitudinē habet. Demōſtratū vero antea fuit contactū horū parallelogrammorum fieri in linea. Ergo linea erit indiviſibilis, neque ullam habebit latitudinem. quod erat demonſtrandum. Patet ergo ex his non tantum longitudinem ſine latitudine concipi poſſe, ſed etiam in natura eſſe longitudinem ſine latitudine, quamvis ſenſibus comprehendi nequeat: nempe lineam, quæ in duorum planorum contactu eſt, omni latitudine carere. Sicut autem antea demonſtratum eſt, lineam ſecundum longitudinem in infinitum dividi poſſe; nec tamen unquam partes ejus fore puncta: Ita etiam nunc demonſtramus ſuperficiem omnem, & quoad longitudinem, & quoad latitudinem, in infinitum poſſe ſecari; neque tamen tali ſectione unquam ad lineas perveniri. Adeoque, ſicut in omni linea, infinita puncta acci-

Digitized by Google

cipi poſſe demonſtratum eſt nec tamen ideo lineam ex punctis componi: ita hinc etiam concluditur in ſuperficie infinitas lineas accipi poſſe; nec tamen ſuperficiem ex lineis componi. quod ut rectius intelligatur, ſequenti capite Geometrice demonſtrabimus.

CAP. X.

Concipiatur in figura num. VII. planum aliquod quadrangulare ACX. rectangulum, in quo ſitus ſit cylinder rectus ATSD cujus baſis ſit circulus DAB: dico primum, cylindrum contingere planum hoc in linea recta. Etenim ſi cylindrus plano quodam per axem ita ſecetur, ut idem planum, in extremitate cylindri, tangat planum in quo cylindrus eſt: erit planum ſecans cylindrum, ad aliud planum, perpendiculare. Sit enim planum ZFA ſecans cylindrum per axem: in extremitate autem ſeu termino ſectionis, circa AT. contingat planum ACX: erit planum AFZ ad planum ACX perpendiculare. Cum enim planum hoc, ſecans cylindrum per axem, ſit pallallelogrammum, per ea quæ à Sereno ſunt demonſtrata lib. I. de Sectione cylindri, propoſitione 11: baſis vero parallelogrammi, nempe recta AZ, ſit diameter circuli ABZD, quæ ideo ipſi AC rectæ eſt ad angulos rectos per XVIII. III. Elementorum: ac per eandem, etiam baſis altera parallelogrammi, quæ eſt diameter circuli baſeos cylindri, ſit perpendicularis eidem plano: totum ergo parallelogrammum, quod cylindrum per axem ſecat,

Digitized by Google

erit perpendiculare plano ACX. per propoſitionem XVIII. lib. XI. Elementor. Tangit autem planum hocce planum ACX in linea, per propoſ. III. XI. lib. Elem. vel per ea, quæ præcedenti capite à nobis fuere demonſtrata: ergo, & cylindrus tanget planum in linea. Si enim non tangit in linea, utique tanget in ſuperficie. Habet vero ſuperficies latitudinem, adeoque terminos latitudinis. Si ergo in ſuperficie tangit: utique per axem cylindri duo plana educi poſſunt, contingentia planum in quo cylindrus eſt, in linea. Id autem eſt impoſſibile. Demonſtratum enim eſt, omne planum, quod per axem cylindri ita ducitur, ut in extremitate cylindri planum tangat, in quo cylindrus eſt, neceſſario ad illud planum eſſe perpendiculare. Si ergo aliud planum v. g. *a.b.* per axem cylindri educatur, tangens ACX. in *b.* in extremitate cylindri: ergo angulus FBA erit rectus, adeoque in triangulo AFB erunt duo anguli recti: quod eſt abſurdum. Tangit ergo cylindrus planum in recta linea: & quod, per axem ipſius, planum ducitur, ad contactum plani, in quo eſt, rectos angulos cum plano eodem facit. Idque in omni cylindro tam magno quam parvo abſolute verum eſt.

Manifeſtum autem eſt, ſi cylindrus ſuper planum aliquod libere circumvolvatur, æquale planum deſcribere parti circumgyratæ ſuæ ſuperficiei. Circumvolvatur ergo tali modo cylindrus ADTS, planũq; deſcribat AL. æquale quartæ parti ſuperficiei ipſius cylindri. Sit porro alius cylinder minor, cujus baſis circulus

EGP

Digitized by Google

EGP, moveaturque in plano æqualiter, usquedum quarta pars ſuperficiei, ſuo circumactu, deſcripſerit planum EI. Planum ergo EI, minus erit plano AL: cum hoc, deſcribatur à quadrante ſuperficiei majoris cylindri: illud vero, à quadrante ſuperficiei minoris cylindri. Sit nunc minor cylinder ita majori inſertus, ut ambo communem axem habeant, motoque majori cylindro, minor etiam circumrotetur. Quando ergo, quadrante ſuperficiei majoris cylindri peracto, major cylinder tetigerit planum ACX in rectalinea LY, minor cylinder, circumgyrata quarta parte ſuę ſuperficiei, tanget planum EH in recta R*d*: adeoque duo hi cylindri æqualia plana deſcribent, cujus baſes erunt æquales, rectæ nempe AL & ER. Plana enim quæ per axem cylindrorũ tranſeunt, tangunt plana in quibus cylindri moventur, ad angulos rectos: ut demonſtratum fuit. Tanget ergo planum FG planum ER ad angulos rectos. & planum FB tanget planum AL etiam ad angulos rectos. Jacent vero duo plana FG & FB ſibi invicem in directum: adeoque FG planum eſt pars plani FB. Si enim ducatur planum quoddam *e. f.* tangens cylindtum PGE in recta repræſentata puncto G: planum hoc erit parallelum plano per axem ZFA. Contactus enim cylindri & plani fit ad angulos rectos, ut antea probatum: adeoque angulus *e*GF æqualis angulo PFG, rectus, recto. Sed eodem modo ſi ad contactum majoris cylindri in linea ex B, tangens planum ex *g. h.* conſtituatur, erit planum ex *g. h.* paral-

Digitized by Google

lelũ plano per axem cylindri, & angulus *g*BF, æqualis PFB angulo, rectus, recto. atque per eandem rationem *e*GB æqualis *g*BG angulo. anguli ergo *e*GB & FG*e* æquales duobus rectis, ideoque FG & GB baſes planorum, in directum ſibi jacebunt per XIIII. I. Elem. adeoque ipſa plana in directum jacebunt. Quando ergo planum FB ad planum AC fuerit perpendiculare; etiam FG eidem plano erit perpendiculare. Et cum AL & ER ſint plana parallela, quando ergo planũ FG, perpẽdiculare fuerit AL plano, etiã perpendiculare erit ER plano, per poriſma XIII. propoſitionis inverſæ libri XI. Elementor. At ſi FG planũ perpendiculare eſt ER plano, etiam FB erit perpendiculare eidem plano ER: adeoque ER parallelogrammum æquale AL parallelogrammo. Pars ergo quarta cylindri minoris, deſcribet planum ER, æquale plano AL. Sed antea per ſe motus cylinder deſcribebat planum EI minus plano AL. Ergo eadẽ cylindri ſuperficies æqualiter circũgyrata, modo majus deſcribit planũ, modo minus: adeoq; minimus cylindrus, & perexiguum deſcribit planum, & maximũ ac avaſtiſſimũ, pro diverſitate cylindri majoris in quo movetur. Deſcribendo autem plana hæc cylinder, ſemper planum tangit in linea. Et cum in utraque circumgyratione æqualiter circumgyretur, ſemperque planis ſuis alias, atq; alias lineas tangat, in plano ſubjecto; ergo in ambobus planis æquales numero erunt lineæ, hoc eſt tot in plano EI, quot in plano ER. At ſi ſuperficies ex lineis componeretur, id

es-

eſſet impoſſibile. Quo plures enim lineæ, tanto major ſuperficies: & quo pauciores lineæ, tanto ſuperficies minor eſſet. Non ergo ſuperficies componitur ex lineis.

Atque hinc ſequitur, ſi mille lineæ, imo quotcunque demum, conciperentur inter ſe invicem junctæ in latum, nullam tamen ſuperficiem facere, nullamque latitudinem habere; ſed unam tum ſimpliciter lineam conſtituere. quod paradoxon etiam Geometrice erit demonſtrandum, ut Sexti argumenta in contrarium eo facilius falſi convincantur. Ex iis quidem, quæ hucusque ſunt demonſtrata, idipſum facile liquet. Nam ſi linea nullam plane habet latitudinem, ergo quamvis centum mille congregentur lineæ, nullam tamen latitudinem facient: cum non poſſint id dare quod non habent. Sed quoniam hoc tam accurate intelligi nequeat; ſicut neque illud, quomodo quotcunque lineæ jungi poſſunt, & omnes tamen unam lineam conſtituere: id ſchemate 8. explicabimus.

Sit ſolidum triangulare ABC RST binis parallelogrammis rectangulis, invicem æqualibus, & uno minori; binisq; æqualibus triangulis rectangulis comprehenſum, quale figura VIII. exhibet. Duo ergo parallogramma nempe BCRS & ABTR concurrunt circa RB. Separata vero hæc bina parallelogramma ante contactum, ſingula ſuos proprios terminos habent: adeoque terminus parallelogrammi BCRS, nempe linea RB ante contactum, differt à termino paralle-

lelogrammi ABRT. adeoque duo iſti termini duas lineas diſtinctas faciunt. Quando vero duo hæc parallelogramma jungi invicem cæperint, tunc duæ hæ lineæ etiam quoad latum invicem junguntur. Dico autem nullam latitudinem facere, ſed duas lineas junctas unam tantum conſtituere. Ex iis enim, quæ antea ſunt demonſtrata, conſtat, duo hæc plana ſe in linea contingere, ſine omni latitudine. Contingunt ſe autem invicem ſuis extremis, quæ ſunt duæ lineæ. Ergo duæ lineæ fiunt una, neque conjunctæ in latum ſuperficiem dant, aut latitudinem ullam faciunt.

Sumatur nunc aliud ſolidum triangulare huic per omnia ſimile & æquale. Repræſentetur vero, in figura 8. prius ſolidum, triangulo ABC: hoc vero, triangulo BED. Jam duæ planæ ſuperficies hujus ſolidi repræſentatæ BE & BD rectis, tangunt ſe invicem in linea; hoc eſt, duæ extremitates harum ſuperficierum, ſeu duæ lineæ junctæ invicem, faciunt unam lineam: ut in priori demonſtratum fuit. Jungantur nunc invicem duo hæc ſolida ABC & BDE verſus B. ita ut AB planum ipſi BD plano in directum jaceat. duæ ergo ſuperficies AB & BD binis ſuis extremis tangunt ſe invicem in linea B: adeoque ex duabus lineis una fit. Sed etiam ſuperficies EB, tangit ſuperficiem AB, in linea B: & ſuperficies GB, tangit ſuperficiem BD, in linea B. Quatuor ergo lineæ, termini quatuor planorum, nempe AB. CB. EB. & DB, junguntur invicem, in linea repræſentata puncto B: neque tamen ullam latitudinem

nem faciunt, ſed omnes unam lineam conſtituunt. Tangunt enim quatuor hæ ſuperficies ſe invicem idque in una linea: ut antea fuit demonſtratum.

Sumantur nunc alia duo ſolida triangularia duplo majora quam illa quæ hucusq; conſideravimus. Nempe retenta eadem longitudine & latitudine, binisque æqualibus parallelogrammis iisdem poſitis, craſſities ſeu profunditas augeatur: ita ut pro triangulo ABC rectangulo, ſumatur duplicatum iſoſceles; nempe in figura VIII. BCE: & pro parallelogrammo CAST, ſumatur duplum hujus, nempe parallelogrammum CEXS. Cum ergo latus parallelogrammi BE, ex conſtructione, ſit æquale lateri BC: totumque parallelogrammum, repræſentatum BE rectâ, toti parallelogrammo, repræſentato BC rectâ, æquale; ergo ſi ſolidum triangulare BEC, imponatur ſolido triangulari BAC, ita ut planũ BE imponatur plano BC, tangent duo hæc ſolida, ſe invicem, adeoq; ſuperficies planæ, in terminis ſuis CS & EX. & utrumque in BR convenient. Concipiatur ſolidũ hoc alteri impoſitum eſſe in figura 8. & eſſe EFB. Alterum autem ſolidum huic per omnia ſimile & æquale ſit CQB, impoſitum ſolido A*B*C. Tangent ergo duo plana ſolidi hujus, nẽpe C*B* & Q*B*, ſe invicem, in linea *B*. & duo hæc plana tangent duo plana F*B* & E*B* in linea *B*. adeoque quatuor lineæ, termini quatuor horum planorum, componuntur in linea *B*; nec tamen latitudinem ullam faciunt: in una enim linea ſolida hæc ſe tangunt. Sed in eadem linea *B* tange-

gebant ſe antea quatuor alia plana, ut antea eſt demonſtratum. ergo octo lineæ compoſitæ quoad latum, unam lineam faciunt, ſine omni latitudine. Quod ſi rurſus bina ſolida, poſterioribus ſolidis ſimilia & æqualia, his imponantur : quadrabunt ſuperficies invicem; adeoque QP B & GFB tangent ſeinvicem in recta repræſentata in *B*. adeoque rurſus quatuor rectæ lineæ conjunguntur quoad latum cum prioribus octo : nec tamen ullam latitudinem faciunt, ſed omnia hæc ſolida AC*B*. CQ*B*. QP*B*. GF*B*. FE*B*. ED*B*. tangunt ab una parte ſe invicem in linea *B*. Si rurſum his alia ſimilia & æqualia ſolida juxta eundem modum imponantur , pro ſingulis ſolidis, duas lineas habebimus, quæ prioribus lineis junctæ, unam tantum dant lineam, nec cæteris craſſiorem, nec ullo modo quoad latitudinem auctam. Sic in dimidio priſmate cujus baſis AKD, axis *B*, ſolida triangularia PO*B*. ON*B*. NM*B*. ML*B*. & ab altera parte G*B*H. H*B*I. I*B*K. K*B*L. ſibi invicem imponuntur : pro ſingulis vero ſolidis duæ lineæ prioribus ad latera apponuntur , adeoque in hoc dimidio priſmate, viginti octo lineæ junctæ invicem unam dant lineam, neque ullam latitudinem habentem, neque ullo modo auctam. Quod ſi priſma ſumatur quingentorum laterum, ſeceturque ad ſingulos angulos plano per axem ; habebit etiam in ſe quingenta corpora triangularia, qualia deſcripſimus: & ſi ſingula corpora hæcce ſigillatim conſiderentur , erunt illic mille parallelogramma invicem æqualia : quæ omnia ſe

ſe tangent invicem verſus unam partem in linea. Tangunt vero ſe invicem ſuis extremis. ergo mille termini mille parallelogrammorum, hoc eſt, mille lineæ junguntur invicem ad latus, & unicum tantum lineam faciunt. Quod ſi priſma mille laterum æqualium ſumatur, ſectūq; fuerit ad ſingulos angulos, per axem; erunt illic bis mille lineæ, invicē, in axe conjunctæ, quæ tamē omnes unā lineam dabunt, nec latitudine auctam, nec craſſitie: ſed omni latitudine & craſſitie carentem. Atque hoc ipſum in quibuscunque, quotcunque laterum, priſmatibus videtur, niſi in ſolis triangularibus, hoc eſt, quæ baſes habent triangulares. Etenim ſi per ſingulos angulos, planis per axem ſecentur, dabunt tot priſmata triangularia, quot latera, quorum quodvis binis extremitatibus tangit aliud, omniaq; priſmata tangunt ſe invicem in recta linea.

Quod autem in lineis hoc modo verum eſt: etiam in punctis verum oſtenditur. Demonſtratum enim antea fuit, duas lineas tangere ſe invicem in puncto. At ſingulæ harum linearum ſua habent extrema, ſuosque terminos, quibus ſe invicem contingunt. Si ergo in figura 8. baſis priſmatis multanguli, ſolummodo conſideretur, quatenus in plura triangula dividitur, quæ omnia in puncto B conjunguntur, patet mille, & centum mille puncta, invicem juncta, nec longitudinem, nec latitudinem, nec profunditatem ullam habere. adeoque omnibus omnino partibus carere, cum nullis dimenſionibus menſuretur.

CAP. XI.

Atque his probe conſideratis, haud difficile eſt falſitatem argumentorum Sexti intelligere, aliisque ob oculos ponere. Is quidem ex hypotheſi Mathematicorum, abſurdum quoddam colligere vult, quò falſi ipſas hypotheſes convincat. Ita enim ait. Μεταβάντες δὲ διδάσκωμεν ὅτι καὶ κατὰ τὰς ἐκείνων αὐτῶν ὑποθέσεις οὐχ οἷόν τε προβαίνειν τὴν ζήτησιν. Ἀρέσκει τοίνυν αὐτοῖς τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ὡς καὶ ἀνώτερον ἐλέγομεν στρεφομένην πᾶσιν αὐτῆς τοῖς μέρεσι κύκλους γράφειν. ὥσπερ θεωρήματι ὄντι συνεκτικωτάτῳ μαχόμενόν ἐστι, τὸ τὴν γραμμὴν μῆκος ἀπλατὲς ὑπάρχειν. ζητῶμεν δὲ τὸν τρόπον τοῦτον. Εἰ γὰρ καθ' αὐτοὺς πᾶν μέρος τῆς γραμμῆς ἔχει σημεῖον, τὸ δὲ σημεῖον στρεφόμενον κύκλον γράφει, δεήσει καθ' αὐτοὺς ὅταν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ στρεφομένη, καὶ πᾶσι τοῖς ἑαυτῆς μέρεσι κυκλογραφοῦσα, τὸ διάστημα καταμετρῇ, τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου μέχρι τῆς ἐξωτάτης περιφερείας ἐπιπέδου, τότε ἤτοι συνεχεῖς ἀλλήλοις ὑπάρχειν τοὺς καταγραφομένους κύκλους, ἢ διεστῶτας ἀπ' ἀλλήλων. Ἀλλ' εἰ μὲν διεστῶσιν ἀλλήλων, ἀκολουθήσει μέρος τι εἶναι τῆς ἐπιπέδου τὸ μὴ κυκλογραφούμενον, καὶ τῆς εὐθείας μέρος, τὸ κατὰ τοῦτο μὲν φερόμενον τοῦ διαστήματος, μὴ κυκλογραφοῦν δέ, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· ἢ γὰρ οὐκ ἔχει κατὰ τοῦτο τὸ μέρος σημεῖον ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἢ ἔχουσα, οὐ καταγράφει κύκλον, ὧν ἑκάτερον παρὰ τὸν Γεωμετρικόν ἐστι λόγον. Καὶ γὰρ πᾶν μέρος τῆς γραμμῆς σημεῖον

Digitized by Google

μεῖον ἔχειν φασί. καὶ πᾶν σημεῖον στρεφόμενον κυκλογραφεῖν. Εἰ δὲ συνεχεῖς ἀλλήλοις ὑπάρχειν οἴονται τοὺς κύκλους, ἤτοι οὕτως, συνεχεῖς ὡς τὸν αὐτὸν ἐπέχειν τόπον, ἢ ὥστε ἄλλον παρ' ἄλλον τετάχθαι, μηδενὸς σημείου μεταξὺ πίπτοντος. καὶ εἰ μὲν τὸν αὐτὸν ἐπέχουσιν τόπον πάντες; εἷς γεννήσεται κύκλος, καὶ διὰ τοῦτο, τῷ ἐλαχίστῳ κύκλῳ καὶ πρὸς τῷ κέντρῳ καθεστῶτι, ὁ μείζων καὶ ἐξωτάτω καὶ πάντων περιληπτικὸς καθεστῶς κύκλος ἴσος γενήσεται, ὅπερ ἐστὶν ἀπεμφαῖνον. οὐ τοίνυν οὕτως εἰσὶ συνεχεῖς οἱ κύκλοι ὡς τὸν αὐτὸν τόπον ἐπέχειν· εἰ δὲ παράλληλοι τυγχάνουσιν ὥστε μεταξὺ μὴ πίπτειν ἀμερὲς σημεῖον, συμπληρώσουσι τὸ ἀπὸ τοῦ κέντρου μέχρι τῆς περιφερείας πλάτος. ἦσαν δὲ γε γραμμαί. αἱ ἄρα γραμμαὶ ἔχουσι τὶ πλάτος καὶ οὐκ ἀπλατεῖς καθεστήκασιν· *Tranſeamus autem ac doceamus, quod nec ex illorum ipſorum hypotheſibus fieri poteſt ut procedat quæſtio. Placet iis, rectam lineam, ſi vertatur omnibus ſuis partibus circulos deſcribere. ut ſuperius etiam à nobis dictum fuit. Cui quidem conſtantiſſimæ eorũ ſpeculationi repugnat, quod linea ſit longitudo carens latitudine. Quæramus autem hoc modo. Nam ſi, ut eſt eorum ſenteutia, univerſa pars lineæ habet ſignum, ſignum autem dum vertitur deſcribit circulum; oportebit ex eorum ſententia, quando recta linea vertens, & omnibus ſuis partibus circulum deſcribens, dimetitur intervallum à centro usque ad extremam planam ſuperficiem, tunc aut inter ſe continuos habere circulos qui deſcribuntur, aut inter ſe inter-*

tervallis disjunctos. Sed ſi ſunt quidem inter ſe intervallis disjuncti, ſequetur, eſſe partem aliquam ſuperficiei, quæ non deſcribitur in circulum, & partem rectæ quæ in hoc quidem fertur ſpatio, non deſcribit autem circulum: quod quidem eſt abſurdum. Aut enim non habet in hac parte ſignum recta linea; aut ſi habet, non deſcribit circulum, quorum utrumque eſt præter ea quæ dicuntur à Geometris. Dicunt enim omnem partem lineæ habere punctum: & omne punctum, ſi vertatur, deſcribere circulum. Sin autem exiſtimant circulos inter ſe eſſe continuos: aut ita ſunt continui, ut eundem locum teneant: aut ut alius juxta alium ſit collocatus, ut nullum punctum interjiciatur. Omne enim punctum, quod cogitatione eſt interjectum, debet eundem circulum deſcribere. Et ſi quidem eundem tenent omnes locum, fiet unus circulus; & propterea major, & qui eſt extra omnes, cæteroſque comprehendit circulus, erit æqualis minimo circulo & qui eſt in centro: quod eſt abſurdum. Non ſunt ergo circuli ſic continui ut eundem teneant locum. Si autem ſunt paralleli ut inter eos non cadat aliquod punctum carens partibus: complebunt latitudinem à centro usq; ad ſuperficiem. Quod ſi compleant; tenent aliquam latitudinem. ſunt autem lineæ. Ergo lineæ habent aliquam latitudinem, neque ejus ſunt expertes. Sed totum hoc Sexti ſophisma in eo conſiſtit, quod lineam ex punctis compoſitã arbitretur, atque partes lineæ eſſe puncta: quod falſum eſſe antea demonſtravimus. Ut autem omnia rectius intelligantur,

tur, argumentum ipſum explicabimus Ajunt Geometræ rectam lineam; ſi æqualiter omnibus ſuis partibus promoveatur, tum ſuperficiem planam deſcribere: ſi vero una extremitate immobili manente, recta linea circumgyretur, circulum ab extremitate altera deſcribi; à tota autem linea, planum circulare. Cum vero in quacunque lineæ parte punctum ſumi poſſit, juxta Mathematicos; ergo quot puncta in linea hac circulum deſcribente, tot etiam erunt circuli. Hi autem circuli vel contigui ſunt, vel diſcreti. Et diſcreti quidem non erunt: ſtatim enim in ſpatio iſto quod inter duos circulos fuerit, aliud ſumetur punctum, quod etiam circulum deſcribet. Si vero omnes hi circuli tangunt ſe invicem; utique vel unum circulum faciunt, vel plures. Sed non unum. Tum enim minimus circulus qui centro proximus eſt, æqualis erit circulo exteriori & maximo. Plures ergo invicem diſtincti ſunt circuli, qui quidem totam circularis hujus ſuperficiei latitudinem undique explent. Ipſæ ergo circulares lineæ latitudinem dant, adeoque id habent quod aliis conferunt. Hæc ſumma eſt totius argumenti hujus Pyrrhonici, quod tamen facile red arguitur, ſi conſideremus, lineam quamcunque in infinitum dividi poſſe, nec tamen unquam ad puncta perveniri. Ubicunque ergo in linea punctum aliquod ſumitur, ſtatim linea iſta, in eo puncto, in duas partes ſecta eſt. In figura enim n. IX. recta linea AB. mota ea ratione ut punctum A quieſcat, B vero moveatur, de-

Digitized by Google

ſcribit quidem, extremitate ſua B, circulum BFG; tota vero linea, planum circulare comprehenſum circulo GFB. Neque hæc linea plures facit circulos quam unum, nempe BG. Aliud enim eſt planum circulare, aliud circulus in hoc plano deſcriptus. Sumatur nunc in recta AB punctum aliquod C. dividit ergo hoc punctum lineam AB in duas partes, ſeu in duas lineas, nempe AC & CB. Alia ergo eſt linea AC, alia vero linea *AB*. Si enim linea AC moveatur, puncto A immoto, deſcribet circulum CHI. recta vero AB deſcribet circulum BFG. neque duo iſti circuli ſe unquam tangent, neque iidem ullo modo ſunt. Inter eos autem linea eſt CB, quæ planum circulare GFB. IHC motu ſuo deſcribit. Quod ſi inter C & B aliud punctum ſumatur K, rurſus recta AB in duas lineas diviſa eſt, nempe AK & K*B*. deſcriptoque, ex AK, circulo, erit inter binos hoſce circulos ſpatium circulare comprehenſum circulis ex AC & A*B*, quod quidem recta K*B* deſcribitur. Eodem modo ſi in AC recta, ſumantur alia puncta, ut D aut F: erit recta AE, ſecta in duas partes, in AD nempe, & DC: tum quoque AD in duas lineas ſecta erit, nempe AE & ED. Quot igitur puncta in linea *AB* ſumuntur: tot etiam partes in eadem linea ſumentur, quæ tamen partes, omnes ſunt lineæ, non vero puncta. Linea enim in infinitum dividitur, non quidem in puncta, ſed ſemper in lineas. Ideoque inter ſingula puncta quæ ſumuntur, ſemper erit linea. Quodcunque enim punctum in hac linea ſumitur, vel
eſt

Digitized by Google

eſt idẽ cũ priori, vel eſt aliud. Si idẽ eſt cũ priori, eundẽ quoq; circulũ deſcribet, adeoq; nullã dabit latitudinẽ. Si non eſt idem cum priori, ergo in alia lineæ parte ſumitur, rectamque in duas alias rectas dividit. Si enim punctum D. ſumatur in puncto C. erunt AD & AC lineæ æquales. Si vero ſumatur alio in loco, vel verſus A, vel verſus *B*; erit linea AD vel major vel minor AC. Si enim D. ſumatur inter A & C, erit AD minor quam AC. ſin autem D ſumatur inter *B* & C. erit AD major quam *AC*. In priori caſu aliquid addendum erit ipſi AD ut æquetur ipſi *AC*. in poſteriori vero caſu, aliquid detrahendum. At illud quod vel additur, vel detrahitur, pars eſt lineæ; adeoque linea: ut antea fuit demonſtratum. Nullum ergo punctum in recta linea ſumi poteſt, ab alio puncto, in hac ipſa linea, diverſum, niſi aliam lineam det, priori vel majorem, vel minorem: adeoque inter duo quæcunque puncta, quæ in eàdem linea, diverſis in locis, ſumuntur neceſſario erunt lineæ. Et quamvis in his quoque lineis puncta ſumi poſſint, tamen eo ipſo hæ quoque lineæ in duas alias lineas dividuntur, idque in infinitum procedendo. Linea enim in infinitum dividi poteſt, & tamen partes ipſius ſemper ſunt lineæ, non vero puncta, ut antea eſt demonſtratum. Quot ergo puncta in recta linea ſumuntur; tot etiam inter eadem puncta lineæ rectæ concipiuntur. idque in infinitum. Quot autem puncta, tot circuli: quot autem lineæ, tot plana circularia, ſingulis binis circulis interjecta. Adeoque non

Digitized by Google

non circuli dant latitudinem, ſed plana circulis interjecta, quæ ex motu rectarum linearum oriuntur. Si enim circuli latitudinem iſtam efficerent, utique tangerent ſe invicem. Alias inter circulos ſpatia eſſent vacua. At circulus circulum tangit tantum in uno puncto: ut demonſtratum Euclidi, propoſit. XII. lib. III. Elem. non quidem ex iis quæ nunc diſputamus: ſed principiis, quæ extra omnem dubitandi aleam ſunt poſita. Qui vero ita ſe intra contingunt circuli, non poſſunt habere idem centrum, ut ex iisdem certiſſimis principiis Euclidi demonſtratum eſt, propoſit. VI. lib. III. Elem. At vero circuli omnes in figura IX. habent ex hypotheſi ipſius quoque Sexti, idem centrum. ergo ſe invicẽ tangere nequeunt. At ſi ſe invicem non tangunt, neque ſuperficiem explere poſſunt, adeoque nec latitudinem facere. Non ergo latitudo circuli ex circulis ductis fit, ſed ex ſpatiis & ſuperficiebus circularibus, quæ, rectis, inter puncta quæcunq; ſumptis, deſcribuntur. Ex multis autem parvis latitudinibus, magnam componi poſſe, dubium non eſt. Non habent ergo vel circulares, vel aliæ lineæ latitudinem. quod erat demonſtrandum.

CAP. XII.

Sed opponet forſan aliquis huic noſtræ reſponſioni illud Sexti argumentum, quod ſtatim, ante hæc verba, quæ, laudavimus attulit, quo probare conatur, duas lineas invicem in latum conjungi poſſe, ita ut omnibus ſuis partibus ſe invicem tangant, & diſtinctæ tamen

men maneant lineæ. Si enim duæ lineæ hoc modo jungi poſſunt, quidni & circuli hoc modo jungentur? Argumentum Sexti hoc eſt. Εἰ γὰρ ἡ γραμμὴ πέρας ἐστὶν ἐπιφανείας μῆκος ἀπλατὲς καθεστῶσα, δῆλον ὡς ὅταν ἐπιφάνεια ἐπιφανείᾳ παρατεθῇ, ἤτοι παράλληλοι γενήσονται δύο γραμμαὶ, ἢ μία ἀμφότεραι. Καὶ εἰ μὲν μία αἱ δύο γραμμαὶ γίνονται, ἐπεὶ ἡ γραμμὴ πέρας ἐστὶν ἐπιφανείας, ἡ δὲ ἐπιφάνεια πέρας σώματος, τῶν δὲ δυοῖν γραμμῶν μιᾶς ἅμα γινομένων, γενήσονται καὶ αἱ δύο ἐπιφάνειαι μία ἐπιφάνεια. Τῶνδε δυοῖν ἐπιφανείων μιᾶς ἐπιφανείας γενηθεισῶν, ἐξ ἀνάγκης ἔσται καὶ τὰ δύο σώματα ἓν σῶμα. Τῶν δὲ δυοῖν σωμάτων ἑνὸς γενομένων, ἡ παράθεσις οὐκ ἔσται παράθεσις, ἀλλ' ἕνωσις, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ἐπὶ τινῶν μὲν γὰρ σωμάτων δύναται ἡ παράθεσις ἕνωσις γίνεσθαι, καθάπερ ὕδατος καὶ τῶν ἐοικότων τούτῳ, ἐπὶ τινῶν δὲ οὐδαμῶς. Καὶ γὰρ λίθος λίθῳ παρατιθέμενος, καὶ σίδηρος σιδήρῳ, καὶ ἀδάμας ἀδάμαντι κατὰ γραμμὴν, οὐχ ἑνοῦνται. ὥστε οὐκ ἂν γένοιντο αἱ δύο γραμμαὶ μία γραμμή. *Si enim linea, quæ latitudine caret, terminus eſt ſuperficiei; manifeſtum eſt, ſi ſuperficies ſuperficiei adjungatur, vel duas lineas parallelas fieri, vel unam eandemque ambas. Quod ſi duæ lineæ una linea fiunt; etiam duæ ſuperficies unam facient ſuperficiem; quandoquidem linea eſt terminus ſuperficiei, ſuperficies autem terminus corporis. At ſi duæ ſuperficies unam faciunt ſuperficiem, er-*

go neceſſarium eſt, duo corpora unum corpus fieri. Si vero duo corpora, conjungendo ſe invicem, unum fiunt: appoſitio non eſt appoſitio, ſed unio: quod eſt impoſſibile. In quibusdam enim corporibus appoſitio eſt unio, ut in aqua & ſimilibus: in quibusdam vero corporibus id nequaquam fieri poteſt. Nam & lapis lapidi appoſitus, & ferrum, ferro, & adamas, adamanti ſecundum lineam, non uniuntur invicem. adeoq; nec duæ lineæ fiunt una linea. Sed duo plana ſibi invicem in linea recta conjungi, antea Geometrice demonſtravimus: ex quo quidē principio id ſequitur, duo quoq; ſolida plana in ſuperficie ſe contingere. Quod vero Sextus pro abſurdo habet, appoſitionem & unionem tum eandem rem fore, id quidem, ſi rectè accipiatur, abſurditatem nullam in Mathematicis facit. Si enim duæ lineæ rectæ componantur invicem in directum, faciunt unam rectam lineam, majorem quidem utraque priorum, ambabus vero æqualem. Eodem modo ſi octo cubi conjungantur invicem, ita ut ſuperficies, ſuperficiei, accurate conveniat, faciunt cubum unum omnibus octo cubis æqualem. Neque video quid abſurdi iin Geometricis hoc dare poſſit. Nam quod lapis lapidi, aut ferrum ferro hoc modo non uniatur, de eo in Phyſicis potius diſputandum, vel ſi mavis in Mechanicis. Geometra enim neque lapides conſiderat, neque ferrum: ſed generaliter omne illud quod in longum, latum, craſſumque extenditur: atque eadem facilitate, qua quodvis corpus, in quotcunque æquales partes dividit, quæ ſimul

mul junctæ, æquantur toti; eadem etiam, ex quotcunq; corporibus, aliud corpus componit, his omnibus æquale: quod ſane Phyſicus aut Mechanicus nequaquam ea arte facere poteſt. Si enim cubus aliquis materialis in octo cubos erit dividendus, cubi iſti minores, ſimul ſumpti, non erunt æquales, & ſimiles, cubo majori. Dum enim ſecatur cubus, perit aliquid ex materia: vel ſi materia eſt mollior, forma viciatur. Ideoque partes hæ omnes compoſitæ nunquam prius totum exhibere poſſunt, propter minutas iſtas portiones materiæ, quæ perierunt. In Geometricis autem, hæc omnia alio modo conſiderantur: neque enim materiales cubos, materialibus inſtrumentis, ſecat; ſed intellectu ſecta, eo modo, eſſe intelligit, ut partes ſimul ſumptæ æquentur toti. quod in Phyſica & Mechanica regulari ſectione nunquam præſtari poteſt. Quod ſi punctus dividens aut ſecans lineam, vel linea ſecans ſuperficiem, vel denique ſuperficies ſecans ſolidum, ullam in ſectione dimenſionem habuerit: tum vel partes lineæ, ſuperficiei, aut ſolidi, huic dimenſioni reſpondentes, detrahentur ſolido; adeoq; partes ſolidi juſto minores erunt: vel etiam fiet penetratio dimenſionum. Sed penetratio dimenſionum eſt impoſſibilis: neque enim duo corpora, ſimul & ſemel, idem ſpatium implere poſſunt. Non poteſt ergo materialis cubus ullo modo, in octo cubos, toti æquales, materialiter dividi. Et tamen poſſunt, in quocunque ſolido cubo, octo cubi mente cōcipi, qui ſimul ſumpti, integro

Digitized by Google

cubo æquales erunt. Atque hæc conſideratio ad Geometram pertinet. Si vero cubus, ita in octo partes ſectus, conſiderari poteſt; illud quidem, quod ſegmenta hæcce facere intelligitur, in quantum ſecat, omni craſſitie neceſſario carebit. Stultum ergo eſt à materialibus ad immaterialia argumentari. Neq; rationes Sexti quicquã concludunt quibus ſua firmare nititur. Καὶ γὰρ ἄλλως, εἰ ἕνωσις ἐστὶ τῶν δύο γραμμῶν μιᾶς γενομένων, καὶ σύμφυσις τῶν σωμάτων, ἐχρῆν τὸν χωρισμὸν γίνεσθαι, μὴ κατὰ τὰ αὐτὰ αὐτῶν πέρατα, ἀλλὰ καὶ ἄλλα καὶ ἄλλα μέρη ἀποσπωμένων, ὥστε καὶ φθοραὶ συμβαίνειν. *Nam alioqui, quoniam eſt unio duarum linearum, quæ effectæ ſunt una; & corporum coitio & coaleſcentia: oporteret fieri ſeparationem, non per eosdem ipſorum fines, ſed dum avelluntur, per alias atque alias partes, adeo ut etiam contingeret interitus.* Sed hoc quidem, in materialibus ac craſſis rebus aliquam daret difficultatem; in corporibus autem, lineisve aut ſuperficiebus Mathematicis, ne conſiderari quidem meretur. Id enim quod conjungitur, etiam eodem modo Geometrice ſeparatur, quo conjungitur. Neque id corporibus, lineisve Mathematicis ullo modo nocet, quod in compoſitione eorum fieri exiſtimat Sextus, nempe ut uno termino priventur. Demonſtravimus enim antea, lineas quotcunque & puncta, invicem conjuncta, unum punctum unamque lineam facere; ita tamen, ut neque lineæ minores fiant, conjunctæ: nec majores, ſeparatæ. Et ſa-

ſane, in conjunctione hac linearum, non unum extremum perit: ſed ambo. Id enim quod antea extremum erat, extremum ulterius non eſt; ſed medium. Certè quocunq; loco concipiatur, extremum non eſt. Namque aliàs, res nunquam conjungerentur. Conjunctio enim & unio, proprie & accurate loquendo, eſt, quando duæ res ita inter ſe junguntur, ut unius extrema fiant extrema alterius. Sic in linea AB, in figura 8, AB & BD conjunctæ ſunt, ita ut hæ lineæ duo tantum extrema habeant nempe A&D. ita ut A, quod erat extremũ lineæ AB, ſit nunc extremũ BD. & B extremũ lineæ, BD ſit etiam extremũ AD. Cũ ergo in omni conjunctione novi termini acquirãtur, debent neceſſario, verſus partes conjunctionis, veteres termini & vetera extrema aboleri. Neq; enim plura verſus eaſdem partes extrema eſſe poſſunt. Si enim unum eſt extremum, aliud eo exterius eſſe nequit. Tum enim prius, extremum male diceretur; quandoquidem aliquid daretur hoc exterius. Debent ergo, in omni conjunctione & compoſitione, extrema, in partibus, ubi compoſitio ſeu conjunctio fit, neceſſario tolli. Neque enim alias ullo modo conjunctio vera & compoſitio fieri poteſt. Contra, ſi res ſeparentur, novos acquirunt terminos. Eſt enim ſeparatio ſeu diviſio, quando res ſub aliis terminis eſſe incipiunt, quam antea erant. Non ergo mirum eſt, ſi ea, quæ in compoſitione, terminos ſuos amiſerant; rurſum, in diviſione acquirant: cum & ea, quæ compoſita non concipiuntur, dividi tamen nequeant, niſi no-

Digitized by Google

vos terminos acquirant. Atque hoc non tantum in Geometricis verum eſt; ſed etiam in rebus materiatis: ſicut cuivis, rerum naturam accuratius conſideranti, patet. Non habet ergo linea ullam latitudinem: neque punctum ullam dimenſionem.

CAP. XIII.

Reſtant adhuc duo Sexti argumenta quibus linearum latitudinem probare conatur, quæ hoc capite examinabimus. Primum eſt, quod linea neceſſario latitudinem habeat, quandoquidem latitudinem metitur. Ὅταν γὰρ, ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖα στρέφηται, καὶ δι' ἑαυτῆς καταγράφῃ κύκλον, τότε ἤτοι κατὰ πάντων τῶν μερῶν τοῦ ἐντὸς τῆς περιφερείας πλάτους φέρεται ἡ εὐθεῖα γραμμὴ, ἢ οὐ κατὰ πάντων, ἀλλὰ τινῶν. Καὶ εἰ μὲν κατὰ τινῶν φέρεται οὐδὲ καταγράφει κύκλον, καθ' ὧν μὲν μέρων φερομένη, καθ' ὧν δὲ οὔ· Εἰ δὲ κατὰ πάντων φέρεται, ὅλον τὸ τῆς περιφερείας καταμετρήσει πλάτος. Πλάτος δὲ καταμετροῦσα ἕξει πλάτος. Τὸ γὰρ τοῦ πλάτους καταμετρητικὸν, ὀφείλει πλάτος ἔχειν ᾧ καταμετρεῖ. *Quando enim quæ à centro ducitur recta linea vertitur & per ſeipſam deſcribit circulum, tunc aut per omnes partes latitudinis, quæ eſt intra circumferentiam fertur recta linea, aut non per omnes, ſed per aliquas. Et ſi per aliquas quidem fertur, ne deſcribit quidem circulum, ut quæ per aliquas quidem partes feratur, per aliquas vero non. Sin autem fertur per omnes, dimetietur totam circumferentiæ latitudinem. Latitudinem autem dime-*

me-

metiens, habebit latitudinem. Nam quod eſt dimetiens latitudinis, latitudinem habere debet, qua metitur. Recta ergo linea circulum dimetiens, juxta Sextum, latitudinem habebit: adeoque linea omni latitudine carebit. Hoc ipſum alio adhuc argumento confirmat: nempe, cum diagonalis quadrati metiatur quadratum, hoc eſt, linea, planum ſeu latitudinem; ergo linea latitudinem habebit. Sed omnis fallacia in verbis conſiſtit. Geometræ, cum conſiderarent omnes omnino magnitudines triplici dimenſione comprehendi, cuivis dimenſioni, peculiare nomen impoſuerunt, ut res diſtinctæ, diſtinctis vocibus exprimerentur. Ita diſtantiam nudè conſideratam, inter duo quæcunque extrema alicujus corporis, vocarunt longitudinem. Si vero duæ dimenſiones ſimul conſiderarentur, tum vocabant latitudinem: non quod ſuperficies, in utramque partem, ſecundum longitudinem menſurari non poſſet, aut quod non æque verſus illas partes longitudinem haberet, ubi latitudo conſideratur, ac verſus illas, ubi longitudo; ſed ut longitudinem puram & ſine latitudine conſideratam, à latitudine diſtingverent, hoc eſt ſimplicem & primam dimenſionem, à duplici ſeu ſecunda & compoſita. Nulla ergo datur latitudo, in qua non ſumi poſſit longitudo. Sed longitudo ſine latitudine datur. Ut verbi gratia in cubo figura n. x. ſive ſumas intervallum ab A ad G, ſive ab A ad B, ſive ab A ad C, ſive denique ab A ad E, vel F, vel D, ſemper eſt longitudo quædam; & quocunque modo hoc inter-

Digitized by Google

tervallum ſumatur, potes ſemper habere longitudinem ſine latitudine; ſi ſolam diſtantiam inter duo puncta extrema conſideraveris. At vero ſi in hoc cubo non diſtantiam duorum punctorum, ſed integrum aliquod latus conſideraveris, utpote ABGC; habes longitudinem pariter ac latitudinem. In omni autem parte latitudinis datur longitudo. Quoniam enim latitudo eſt: terminos habet. Termini vero diſtant invicem, adeoque inter eos longitudo ſumi poteſt. Differt tamen longitudo à latitudine. Deniq; ſi totum cubum conſideraverim, habeo non tantum longum & latum; ſed etiam craſſum: & tamen in quacunque parte craſſitiei eſt longitudo, quia in quacunque ejus parte ſumi poteſt linea. Habet ergo linea primam & ſimpliciſſimam menſuram in ſe, qua omnes magnitudines menſurantur. Neque negant Geometræ vel latitudinem vel craſſitiem linea menſurari: tantũ diſtinctis vocibus diſtinctas dimenſiones indicant Nempe, ſimpliciſſimam dimenſionem vocant lineam, qua omnium, quorumcunq; terminorum diſtantiæ ſumuntur: magis vero compoſitam dimenſionem, quæ juxta duas rationes menſuranda venit, neque unica illa ſimpliciſſima abſolvitur, ſuperficiem vocarunt. Tertiam deniq;, quæ non niſi triplici menſura cognoſcitur, corpori tribuerunt. Id ergo quod menſurat aliud; debet ſane quantum eſſe, & dimenſionem in ſe habere: ſed non eandẽ quam menſuratum. Simpliciſſima enim menſura, & ex qua cæteræ dimenſiones componuntur, facile compo-

Digitized by Google

poſitas metitur. Joculare ergo Sexti argumentum eſt, quod latitudinem menſurat, illud latitudinem neceſſario habet. Neque enim linea, ſua latitudine menſurat aliam latitudinem; ſed in ſuperficie, diſtantiam tantum terminorum, & ab una, & ab altera parte ſumit. Cumque in ſuperficie duæ ſint dimenſiones, quæ quidem ambæ longitudine conſtant, & longitudine menſurantur; unam quidem dimenſionem Geometræ longitudinem vocarunt, alteram latitudinem, uſi hac in re vocibus vulgi. Sapientis enim eſt verba & voces ex communi hominum uſu ſumere, inde autem ad ſuum uſum applicare.

Secundum Sexti argumentum eſt, quod, quoniam cylinder planum in linea tangat, circumvolutus autem planum deſcribat: inde ſequatur, lineas omnino latitudinem habere, quandoquidem, planum, hoc eſt, latitudinem, componant. Τὸν δὲ κύλινδρον φασὶ καθ' εὐθεῖαν γραμμὴν ἅπτεσθαι τῆς ἐπιπέδου, καὶ ἐκκυλιόμενον τῇ ἀνὰ μέρος ἄλλων καὶ ἄλλων εὐθειῶν θέσει καταμετρεῖν τὴν ἐπίπεδον. Ἀλλ' εἰ καὶ καθ' εὐθεῖαν ἅπτεται τῆς ἐπιπέδου ὁ κύλινδρος, καὶ κυλιόμενος τῇ ἀνὰ μέρος ἄλλων καὶ ἄλλων εὐθειῶν θέσει καταμετρεῖ τὴν ἐπίπεδον, πάντως καὶ ἡ ἐπίπεδος συνέστηκεν ἐξ εὐθειῶν, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πάλιν ἐξ εὐθειῶν πεπλήρωται. Ὅθεν ἐπεὶ ἔχει καὶ ἡ ἐπίπεδος πλάτος, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ὁμοίως, καὶ οὐκ ἔστιν ἀπλατής, τὸ δὲ πλάτους ποιητικὸν ὀφείλει καὶ αὐτὸ πλάτος ἔχειν, δῆλον οὖν ὡς ὅτι καὶ εὐθεῖαι

γραμμαὶ συμπληρωτικαὶ οὖσαι τοῦ πλάτους, ἐξ ἀνάγκης πλάτος ἔχουσιν, ὥστε μηδὲν εἶναι μῆκος ἀπλατές, διὰ δὲ τοῦτο μηδὲ γραμμήν. *Dicunt etiam cylindrum per rectam lineam tangere planitiem, & evolutum metiri planitiem per partes ponendo alias atqve alias rectas. Quod ſi ita eſt, omnino etiam ex rectis conſtat planities: & cylindri ſuperficies rurſus completa eſt ex rectis. Unde quoniam & plana ſuperficies latitudinem habet, etiam cylindrica ſuperficies latitudinem habebit, neque erit ſine latitudine. At quod latitudinem facit, debet ipſum omnino latitudinem habere. Manifeſtum ergo eſt, quod quoniam rectæ lineæ expleant latitudinem, etiam neceſſario latitudinem habeant, ideoque, nec ullam longitudinem, expertem latitudinis: & propterea nec lineam.* Sed in hoc argumento vel falſum Sextus ſupponit, vel male concludit. Antea enim demonſtravimus ſuperficiem ex lineis non componi, & quamvis infinitæ numero lineæ in quacunque ſuperficie ſumi poſſint: non tamen lineas eſſe partes ſuperficiei. Idque ex hoc ipſo problemate quod Sextus heic proponit, manifeſtum fecimus: ita ut nemo contradicere poſſit, niſi qui inæquales magnitudines in totidem æquales partes ſecari poſſe contenderit. Omnes enim lineæ, quoad ſecundam menſuram, ſunt intér ſe æquales, nec ullam habent latitudinem. Imo ſi in gratiam Sexti poneremus, lineam, aliquam habere latitudinem, dicendum tamen omnino foret, lineam, id eſſe, qvod minimam la-

Digitized by Google

latitudinem habet. Unde, per hanc rationem, omnes lineæ, qvoad latitudinem, forent æquales: ſi quidem, omnes minimam latitudinem haberent. At tum quæ ex pluribus æqualibus latitudinibus componeretur latitudo, major eſſet, qvam qvæ ex paucioribus. Demonſtratum vero eſt, & maximam, & minimam latitudinem, æqvales numero lineas habere; nec plures in una, qvam in alia poſſe concipi. Ergo ex lineis ſuperficies non componitur, neque lineæ ſunt partes ſuperficierũ, neque latitudinem ipſius conſtituunt. Si igitur Sextus inde probare velit, lineam latitudinem habere, quia ſuperficiem conſtituit, adeoque latitudinem facit: falſum ſupponit. Neque enim ſuperficies componitur ex lineis. Quod ſi autem Sextus, hoc ipſum non ſupponere, ſed allata demonſtratione probare velit; jam falſum concludit ac male argumentatur. Neque enim ſequitur, quoniam cylinder tangit ſemper planum in linea; evolutus autem, planum deſcribit: quod ideo, vel cylindri ſuperficies, vel planum ex lineis componatur. Etenim in quacunque ſuperficie, tam circulari, quam plana, infinitæ lineæ ſumi poſſunt. Sed ſi quidem differant invicem, neceſſario inter eas datur ſuperficies: atque in circulari quidem circularis, in plana autem plana. Ac in plana quidem dari, hinc patet, quod duæ ſuperficies, in infinitum, quoad latitudinem, ſecari poſſint, ut antea demonſtratum: ideoque nec unquam ulla diviſione ad lineam perveniatur. Si enim ad lineam perveniri poſſet; ſuperficies

in infinitū non divideretur. Atq; hoc in plana quidem ſuperficie antea demonſtravimus. In circulari autem ſuperficie idipſum inde liquet, quod ſicut in circulo, per quæcunque puncta, lineæ à centro ad peripheriam educantur; ita in cylindro per quaſcunque lineas plana ab axe cylindri per ſuperficiem educi poſſint. Quod ſi in circulo puncta fuerint diverſa, etiam eductæ lineæ diverſæ erunt, & circa peripheriam diſtabunt invicem, quæ diſtantia eo ſenſibilior, quo major circulus. At ſi diſtant, ergo linea inter eas ſumi poteſt. omnis enim diſtantia lineà menſuratur. Quod autem in circulo per lineas & puncta, id in cylindro per plana & lineas demonſtratur. Nam ſi diverſæ in cylindri ſuperficie lineæ ſumantur, plana per axem ad ſuperficiem educta, diverſa erunt; adeoque, circa ſuperficiem, intervalla inter hæc plana; unde & latitudo. Sunt quidem hæc valde ſubtilia & intellectui non ſatis obvia, ſed mirum illud non eſt. Infinita enim, indiviſibilia & perpetuo ac in infinitū diviſibilia, qui intelletu comprehendere ſe poſſe exiſtimat, infinitas intellectui ſuo vires adſcribit, pluraque ſibi tribuit, quàm habet.

CAP. XIIII.

Et hactenus quidem ea Sexti argumenta examinavimus, quæ contra eſſentiam puncti, linearum & ſuper, ficierum proponit: hoc autem capite, ea præ manibus ſumère volumus quæ adverſus corporis naturam atque eſſentiam dicuntur. Primo autem loco, argu-

Digitized by Google

gumentum proponit, quod palmarium exiſtimat, & quo omnia Geometrarum principia demoliri cogitat, quod quidem ex contactu corporum deſumit. Duo enim corpora tangunt ſe invicem quando conjungunguntur. Tangunt vero ſe invicem ſuis extremis. Vel ergo extrema iſta corporum, ſunt corpora: vel etiam corpora non ſe invicem contingunt. At ſi extrema corporum ſunt corpora, ergo ſuperficies habebit profunditatem. Extremum enim corporis eſt ſuperficies. Si vero ſuperficies habet profunditatem, ergo linea quæ ſuperficiem deſcribit habebit latitudinem, & punctum quod lineam format, non omni carebit dimenſione. Hæc ſumma eſt argumenti ipſius: quod quidem eo facilius refutatur, quo ea quæ ad extremorum ſpeculationem pertinent antea à nobis manifeſtius ſunt explicata. Demonſtratum autem nobis eſt lineas quidem duas, quando ſe invicem in angulo tangunt, nullo modo contactum in linea facere, id enim plane eſſe impoſſibile: ſed in puncto. Et tamen punctum hoc non eſſe partem lineæ, ſed tantum ipſius extremum. Ita quoque in ſuperficiebus demonſtratum eſt, eas ſe invicem tangere in lineis, nec tamen lineas ex ſuperficiebus componi. Eodem ergo modo, etiam corpora ſe invicem tangunt non quidem in corpore ſed in ſuperficie. Si enim in corpore ſe tangerent; utique fieret penetratio dimenſionum, vel unius corporis ſuperficies alterius corporis ſuperficiei cederet, adeoque vel unius, vel amborum corporum ſuperficies muta-

rentur. Quando enim manus manum tangit, non tota manus totam manum tangit: ſic enim & arteriæ, & oſſa, & muſculi tangerentur invicem, ſingula à ſingulis, & omnia ab omnibus. At tum quidem neceſſario fieret penetratio dimenſionum: unumque corpus eſſet in loco alterius, adeoque duo corpora ſimul & ſemel uno in loco, quod eſt abſurdum. Quod ſi dicam cutim tangere cutim; verum id etiam eſt, ſed non qua corpus eſt. Etenim cum cutis craſſitiem habeat, pars illa quæ pingvedini adjacet illamque tangit, non tangit cuticulam. Ideoq; quando cuticula tangit cutim, non totâ ipſius ſubſtantiam tangit, ſed tantum id quod cuticulæ adjacet. Verum quidem eſt ſi cuticula prematur ipſam quoq; cutim premi, una cum ſuppoſita pingvedine. Sed aliud eſt motus, aliud contactus. Omnis autem preſſio fit cum motu: imo ipſa preſſio eſt motus. Quod ſi rurſus cuticulam conſideremus, certum quidem eſt, eam, extremum corpus in manu eſſe. Illa tamen parte qua cutim tangit, alteram manum non tangit. Adeoque nec corpore toto tangit, ſed tantum extremo ſui. Sed in rebus materialibus, omnia tam accurate explicari nequeunt. Corpora enim materialia vix ſine aliqua colliſſione & violentia tangere ſe invicem poſſunt. Geometra vero contactum conſiderat ſeparatum à violentia. Sextus ergo heic antiqvum obtinet dum, à materialibus, ad ea quæ materie carent, male argumentatur. Id certum & clarum eſt, corpora ſe invicem eo plane modo contingere, quo plana,

pla-

plana; & lineæ, lineas; hoc eſt ſuis extremis: neque extremum idem eſſe cum illo, cujus eſt extremum, ſed omnino differre invicem. Recte ergo dicitur, & corporum, & ſuperficierum, & linearum extrema ſe invicem tangere: & nihilominus, corpora, & lineas, & ſuperficies, tangere ſe invicem ſuis extremis. Quamvis enim ſuperficies, lineæ, & puncta, non ſint partes conſtituentes aut materiales corporum, planorum, aut longitudinum: ſunt tamen extrema corporum, & velut partes circumſcribentes ac termini. Sicut enim terminus agri, non eſt pars agri, ex quo ager componitur: nec tamen ager ſine termino eſt, & quorum termini ſe invicem tangunt, illi etiam agri ſe invicem tangunt: ita etiam nec corpora, nec ſuperficies lineæve, ex punctis, lineis, aut ſuperficiebus componuntur; & tamem ſingula ſingulorum, termini ſunt. Aliud ergo pars componens ſeu conſtituens; & aliud terminus. Pars componens ſeu conſtituens dat rei, id eſſe, quod eſt: terminus autem, dat rei eſſe finitum, neque in infinitum extendi, ſed certis limitibus circumſcribi. Quibus conſideratis, etiam alterum argumentum Sexti ſua ſponte ruit. Εἰ γὰρ inquit σῶμα ἐστὶν ὥς φασιν οἱ Γεωμέτραι τὸ τὰς τρεις ἔχον διαστάσεις μῆκος πλάτος καὶ βάθος, ἤτοι χωριστόν ἐστι τούτων τὸ σῶμα, ὥστε ἄλλο μὲν εἶναι τὸ σῶμα, ἄλλο δὲ τὸ μῆκος τοῦ σώματος, πλάτος δὲ τε καὶ βάθος, ἢ ὁ ἀθροισμὸς τούτων ἐστὶ τὸ σῶμα. Ἀλλὰ χωρίζεσθαι

σθαι μὲν τούτων τὸ σῶμα οὐ πιθανόν ἐστιν. Ὅπου γὰρ μήτε μῆκος ἐστὶ μήτε πλάτος μήτε βάθος, ἐκεῖ οὐχ οἷόν τε νοῆσαι σῶμα. Εἰ δὲ ὁ ἀθροισμὸς τούτων νοεῖται σῶμα, καὶ ἄλλο παρὰ ταῦτα οὐδὲν ὑπάρχει, ἐξ ἀνάγκης, ἐπεὶ ἕκαστον τούτων ἀσώματόν ἐστι, καὶ ἡ κοίνη τῶν ἀσωμάτων σύνοδος γενήσεται ἀσώματος. ὥσπερ γὰρ καὶ ἡ σύνθεσις τῶν στιγμῶν καὶ ἡ σύνοδος τῶν γραμμῶν ἀσωμάτων φύσει καθεστηκυιῶν οὐ ποιεῖ στερεὸν καὶ ἀντίτυποον σῶμα, οὕτω καὶ ἡ τοῦ πλάτους καὶ ἡ τοῦ μήκους ἤτε δὲ καὶ ἡ τοῦ βάθους συνέλευσις, ἀσώματος οὖσα, οὐκ ἂν ποιῆσαι στερεὸν καὶ ἀντίτυπον σῶμα. εἰ δὲ μήτε χώρις τούτων ἐστὶ τὸ σῶμα, μήτε ταῦτ᾽ ἐστιν, ἀνεπινόητον ὅσον ἐπὶ τοῖς Γεωμέτραις γίνεται τὸ σῶμα. *Si enim corpus, ut Geometræ ajunt, illud eſt, quod tres habet dimenſiones, longitudinem, latitudinem & profunditatem: aut corpus eſt ſeparabile ab his, ita quidem ut aliud ſit corpus, aliud vero corporis longitudo, latitudo, & profunditas; vel harum dimenſionum congregatio eſt corpus. At veroſimile non eſt hæc à corpore ſeparabilia eſſe. Ubi enim neq; eſt longitudo, neque latitudo, neque profunditas, illic non poteſt concipi corpus. Si vero congregatio horum intelligitur corpus, & hoc præterea nihil eſt; neceſſario ſequitur quod cum ſingula ſeparata careant corpore, etiam compoſita corpus non habeant. Sicut enim compoſitio punctorum, & linearum corpore carentium, nullum corpus ſolidum & reſiſtens facit: ita etiam compoſitio latitudinis, longitudinis, & profunditatis, rerum incorpo-*

poralium, non facit corpus ſolidum & reſiſtens. Si ergo neq; ſine his corpus eſt, neq; hoc eſt: utique incomprehenſibile id eſt quod Geometræ corpus appellant. Sed antea demonſtravimus nec lineam ex punctis, nec ſuperficiem ex lineis, generari: atque eodem modo nec corpus ex ſuperficiebus. Unde nec hoc Sexti argumentum, neque quæ ſequuntur, quicquam ad rem faciunt. In corpore quidem omnes tres dimenſiones conſiderari poſſunt, ſed hæ dimenſiones corpus non conſtituunt. Sic color albus, in albo; niger, in nigro corpore, concipitur; neque corpus tale ſine colore eſt: non tamen color eſt corpus; vel corpus illud eſt color. Ridicula igitur plane eſt Sexti noſtri conſequentia. Si corpus ſine his non eſt, & tamen hæc corpus non conſtituunt, ergo corpus concipi nequit. Multa enim in corporibus, imo in quibuscunque rebus concipi poſſunt, ac revera in talibus rebus ſunt, quæ tamen eſſentiam illius rei non conſtituunt. Diximus antea de colore, infinita corpora eſſe in quibus color eſt, & qui ſine colore non exiſtunt: nec tamen, color ideo eſt corpus, aut corpus illud neceſſario eſt color. Concipiuntur ergo dimenſiones hæ in corpore, imo revera inſunt corpori; quamvis eſſentiam ipſius, ut materia non conſtituant. Nullum enim corpus eſt, cui non aliqua ſit longitudo, latitudo, & profunditas; imo ſine his, ne corpus quidem concipi poteſt. Non tamen ideo ſunt partes, ex quibus corpus componitur: ſed dimenſiones, quæ omne corpus neceſſario ſe-

Digitized by Google

qvuntur; quibus ſublatis tollitur corpus, & quæ ſine corpore non ſubſiſtunt, ſed nihil ſunt. Optandum quidemSexto foret, ut quod tempus ſtultiſſimæ huic ſectæ impendit, id diſcendæ differentiæ, inter ſubſtantias & accidentia, tribuiſſet. Neque enim tam ridicula unquam propoſuiſſet, ſi ullam rerũ vulgatiſſimarumſolidam unquam cognitionẽ habuiſſet. Verũ ignoraſſe hæc videtur, non quod ignoraret, ſed quod veritatem nulla aliàs fronte impugnare poſſet, ſi contra propriam ſcientiam aliquid diceret. Atque hæc ſunt illa, quibus eſſentiam linearum, punctorum, ſuperficierum, & ipſius denique corporis Geometrici evertere conatus fuit Sextus, ſane quam infæliciter. Nihil enim aliud his omnibus præſtitit, quam ut ſaniorum hominum, riſui ſe exponeret, iisq; exemplo eſſet qui ſimili ſtultitia & audacia, certiſſimas veritates manifeſtis falſitatibus evertere volunt, non quidem eruditionis aut ſapientiæ oſtentandæ cauſa, (ſapientia enim veritatis eſt cognitio & falſitatum fuga; eruditio autem eſt poſſeſſio ſapientiæ, non vanitatis aut ſtultitiæ) ſed ut aliis ambitionem prodant ſuam, & quam vacua cerebro geſtent capita, qui ne eas quidem veritates perſpicere aut ſequi poſſunt, quæ natura ipſa ſingulis hominibus implantavit. Sed dum delirando, vana ſectantur, non veritatem tantum, ſed & omnem quoque famam atq; exiſtimationem perdunt. Sibi tamen placent, ſicut & Sextus noſter, qui hæc quidem tanti fecit, ut etiam bis poneret, pleraque iisdem verbis, primo quidem in hoc

Digitized by Google

hoc libro adverſus Geometras: poſtea vero in commentariorum libro VIII. ubi contra Logicos de toto & parte, aliisque eo ſpectantibus diſputat. Quædam tamen aliis verbis & paulo plenius explicat, ſicut illud quod antea propoſuerat de puncto, quod tangere debeat planum in quo lineam deſcribit. Sed de contactu corporum antea ſatis diximus. Id certum eſt, ſi corpus conicũ, vel aliud in ſolidum angulum deſinens, imponatur plano cuidam corpori; tum duo iſta corpora, tangere ſe invicem in puncto. Quod quidem ex iis, quæ hactenus demonſtrata ſunt facile per ſe intelligitur. Si vero corpus hoc pyramidale aut conicum, eodem ſitu moveatur ſuper planum hoc in directum: lineam deſcribet. Jam certum quidem eſt, lineam hanc absque contactu non generari: certumque eſt, corpus pyramidale, aut conicum; aliud corpus, ſemper in puncto tangere: nec tamen, vel contactus ille, vel lineæ deſcriptio ſenſibus, ſed ſolo intellectu percipitur. Quæ ergo contra priora dicta ſunt, ea etiam contra poſteriora valent: cum eadem ſint argumenta, iiſdem verbis concepta; ut non opus fuiſſet, bis in eodem opere eadem ſcribere: niſi forte pulchrum duxerit, collectores verſuum Homericorum imitari, qui plurimos verſus, alicubi bis, alicubi ter, ponunt, iiſdem verbis retentis. Sed cætera Sexti pertexamus.

CAP. XV.

Poſtquam diu cum lineis, ſuperficiebus, & corporibus, infæliciter luctatum ſe animadvertiſſet Sextus;

Digitized by Google

tandẽ hac pugna relicta, definitionem rectarum linearum, angulique & circuli adgreditur. Compertum fortè habebat nil difficilius Mechanico eſſe, quam rectam lineam ſenſibus aliquo modo exhibere. Videbat quoque vix unquam talem angulum, qualem Geometræ conſiderant, ullis ſenſibus concipi poſſe. Ideo heic ſperabat facilius ſibi ceſſura omnia. Verum non minus heic ſpe decidit ſua, quàm in prioribus. Videndum tamen quid dicat, & quas rationes proferat. Còntra rectæ quidem lineæ definitionem hoc argumentũ proponit. Recta linea definitur à Geometris illa quæ partibus ſuis ex æquo interjacet. At vero rectã lineam dari inde probant quod partes æqualiter ſitas habeat. Ergo circulũ committunt Geometræ, & idẽ per idẽ probant.

Καίτοι πρὶν τούτων καὶ πρὸς τὰς ἀποδεδειχυίας αὐτῶν ἀρχὰς οὐκ ὀλίγα δυνατόν ἐστι λέγειν, οἷον ὅταν φᾶσιν εὐθεῖαν εἶναι γραμμὴν τὴν ἐξ ἴσου τοῖς ἑαυτῆς μέρεσι κειμένην. Ἵνα γὰρ τὰ ἄλλα παρῶμεν ἐκεῖνο μὲν συμφανές ἐστιν ὅτι τῆς γενικῆς γραμμῆς μὴ οὔσης, οὐδὲ εὐθεῖα γραμμὴ γένοιτ᾽ ἄν. Εἶτα καὶ τὸ ἴσον λέγεται διχῶς, καθ᾽ ἕνα μὲν τρόπον τὸ ἰσομεγέθες, καὶ μήτε ὑπερέχον ἐκείνου, τοῦ ᾧ λέγεται ἴσον, μήτε ὑπερεχόμενον, καθὸ καὶ τὸ πηχυαῖον ξύλον ἴσον εἶναι λέγομεν τῷ πηχυαίῳ. καθ᾽ ἕτερον δὲ τὸ ἔχον ἐξ ἴσου τὰ μέρη κείμενα, τουτέστι τὸ ὁμαλόν. Οὕτω γοῦν τὸ ἴσον ἔδαφος καλοῦμεν ἀντὶ τοῦ ὁμαλόν. Διχῶς οὖν τοῦ ἴσου προσαγορευομένου ὅταν οἱ Γεωμέτραι τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ὑπογρά-

φον

Digitized by Google

φοντες φῶσιν, εὐθεῖά ἐστι γραμμὴ ἡ ἐξ ἴσου τοῖς ἑαυτῆς μέρεσι κει-
μένη, ἤτοι τὸ κατὰ τὸ πρῶτον σημαινόμενον λαμβάνουσιν ἴσον, ἢ τὸ κατὰ τὸ δεύτερον. Ἀλλ' εἰ μὲν τὸ κατὰ τὸ πρῶτον, τελέως εἰσὶν ἀνόητοι. οὐδένα γὰρ ἔχει νοῦν τὸ εὐθεῖαν εἶναι γραμμὴν τὴν ἰσομεγέθη τοῖς ἑαυτῆς μέρεσι, καὶ μήτε ὑπερέχουσαν ταῦτα, μήτε ὑπερεχομένην ὑπὸ τούτων. Εἰ δὲ τὸ κατὰ τὸ δεύτερον, δι' αὐτοῦ τοῦ ζητουμένου διδάξουσιν· εἴ γε ὅτι μὲν ἐστὶν εὐθεῖα, περιστᾶσιν ἐκ τοῦ ὁμαλῶς τε καὶ ἐπ' εὐθείας ἔχειν κείμενα τὰ μέρη· τὸ δὲ ἐπ' εὐθείας τι κεῖσθαι οὐκ ἐστὶ μαθεῖν, μὴ ἐπιβάλλοντας τῇ εὐθείᾳ.
Quamquam antea non pauca dici poſſunt, adverſus poſita eorum principia, ut qvum dicunt, rectam eſſe lineam quæ ſita eſt ex æquo ſuis partibus. Nam ut alia prætermittamus, illud quidem evidens, quod ſi non ſit linea in genere, nec recta poſſit eſſe linea. Deinde æqvum ſeu æquale dicitur, duobus modis: uno quidem modo, id quod eſt æqualis magnitudinis, & neque id exſuperat, cui dicitur æquale, neque ab eo exſuperatur. Quomodo lignum cubitale dicimus eſſe æquale ligno cubitali. Altero autem, id quod habet partes ex æquo ſitas, hoc eſt planum & æquabile. Ita ergo dicimus, ſolum æquale, pro eo quod eſt planum & æquabile. Cum ergo æquale dicatur duobus modis, quando Geometræ rectam lineam deſcribentes dicunt (Recta linea eſt, quæ ſita eſt ex æquo ſuis partibus) aut in primo ſignificato accipiunt æqvum ſeu æquale, aut in ſecundo. Sed ſi in primo quidem ſignificato, plane deſipiunt. Nullum enim habet ſen-

ſum, eſſe rectam lineam, quæ ſit æqualis magnitudinis ſuis partibus, & neque eas ſuperet, nec ab eis ſuperetur. Sin autem in ſecundo, per idipſum quod quæritur docebunt; ſiquidem, quod recta quidem eſt, oſtendunt, quod æquabiliter & in recta linea habeat partes. In recta autem linea aliquid eſſe ſitum, dicere non poſſumus; priusquam ad rectam animum adjecerimus. Sed primum quidem propria verba Geometrarum audienda ſunt; inde Sexti argumenta conſideranda. Definitiones igitur varias lineæ rectæ recenſet Proclus, partim priorum, partim poſteriorum Geometrarum. lib. II commentar. in primum Elem Euclidis. Ὁ δὲ Πλάτων ἀφορίζεται τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν, ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ. Καὶ γὰρ τοῦτο, τὰ μὲν, ἐπ' εὐθείας ἀλλήλοις κείμενα πάσχειν ἀναγκαῖον, τὰ δὲ ἐπὶ κύκλου περιφερείας, ἢ ἄλλης διαστάσεως, οὐκ ἀναγκαῖον. Ὅθεν δὴ καὶ οἱ Ἀστρολογικοὶ φασὶν, τότε τὸν ἥλιον ἐκλείπειν, ὅταν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γένηται αὐτός τε καὶ ἡ σελήνη καὶ τὸ ὄμμα τὸ ἡμέτερον. Τότε γὰρ ὑπὸ τῆς Σελήνης ἐπιπροσθεῖσθαι, μέσης αὐτοῦ τε καὶ ἡμῶν γενομένης. *Rectam vero lineam Plato definit cujus media extremis opponuntur. Hoc enim iis neceſſario contingit quæ in directum ſibi invicem jacent. Quæ vero alio modo diſtant, aliumve ſitum habent, vel juxta peripheriam circuli, vel alium quemcunque modum, id neceſſario non contingit. Quam ob cauſam ipſi quoque Aſtrologi, Solem tum deficere dicunt, quando in eadem recta linea fuerit cum Luna & no-*

noſtro oculo. Tunc enim Lunam, mediam inter illum & nos, utrique (extremo) opponi. Atque hinc ſtatim quivis diſcit, rectam lineam, vere in natura exiſtere, cum tam mirabiles effectus habeat, lumenque illud dulciſſimum, & quo nihil in vita jucundius, terris eripiat. Sed de eo velle dubitare, an recta linea in natura eſſet, id quidem manifeſta foret inſania. Et Sextus qui Geometras inſaniæ arguere conatur, ipſemet ſtultitiam ſuam prodit, dum res manifeſtas, ſe percipere non poſſe, demonſtrat. Verum definitionem aliorum Geometrarum examinabimus. Euclides quidem his verbis definit Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. *Recta linea eſt quæ ex æquo punctis ſita eſt, quæ in ipſa ſunt.* Quæ verba ut melius intelligantur, Procli expoſitionem adponemus. Τὸν δὲ inquit loco laudato, τῆς εὐθείας ὁρισμὸν ὁ μὲν Εὐκλείδης τοῦτον ἀποδέδωκεν ὃν καὶ παρεθέμεθα καὶ δηλοῖ διὰ τούτου, μόνην τὴν εὐθεῖαν ἴσον κατέχειν διάστημα, τὸ μεταξὺ τῶν ἐπ' αὐτῆς σημείων. ὅσον γὰρ ἀπέχει θάτερον τῶν σημείων θατέρου, τοσοῦτον τὸ μέγεθος τῆς εὐθείας τῆς ὑπ' αὐτῶν περατουμένης. Καὶ τοῦτο ἐστι τὸ ἐξ ἴσου κεῖσθαι τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις. Εἰ δὲ περὶ τῆς περιφερείας, ἢ καὶ ἄλλης τινὸς γραμμῆς, δύο σημεῖα λάβοις, τὸ μεταξύ τούτων ἀπολαμβανόμενον διάστημα τῆς γραμμῆς, μεῖζον ἐστι τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν. Καὶ πᾶσα γραμμὴ τοῦτο πεποντυια φαίνεται, πλὴν τῆς εὐθείας. Καὶ ὁδεύοντας τὴν ἀναγκαῖον μόνην πορεύε-

σθαι

θαι κατὰ τὴν εὐθεῖαν φασὶ καὶ οἱ πολλοὶ, τὰς δὲ μὴ ἐπ' εὐθείας, πλεῖον τῆς ἀναγκαίας. *Definitionem vero rectæ lineæ Euclides quidem eam dedit, quam nunc propoſuimus. Ea vero ſignificat, ſolam rectam æqualem eſſe intervallo, qnod inter puncta ipſius ſumitur. Quantum enim fuerit diſtantia unius puncti ab altero, tanta eſt magnitudo rectæ lineæ, quæ his punctis terminatur. Et hoc eſt ex æquo interjacere punctis, in ſe ſumptis. Si enim circa circumferentiam aliamve quamcunque lineam duo puncta ſumantur; intervallum illud lineæ hujus inter duo hæc puncta ſumptum, majus erit diſtantiâ punctorum. Atque hoc omni lineæ contingit, niſi ſoli rectæ. Vulgus quoque eos, qui itinera conficiunt, ea ſpatia quæ fiunt juxta rectam lineam neceſſario conficere ajunt, cætera vero, quæ extra rectam lineam ſunt, præter neceſſitatem facere.* Videmus ergo quid Euclidi recta linea ſit, nempe idem quod verbis paulo clarioribus expoſuit Archimedes, minimam omnium inter eoſdem terminos. lib. I. de Sphæra & Cylindro. Λαμβάνω δὲ ταῦτα τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. *Aſſumo autem hoc, linearum quæ inter eoſdem terminos ſumuntur, minimam eſſe rectam.* Proclus loco citato hoc modo definiſſe Archimedem rectam lineam ait. Ὁ δὲ αὖ Ἀρχιμήδης τὴν εὐθεῖαν ὡρίσατο γραμμὴν ἐλαχίστην τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν. Διότι γὰρ, ὡς ὁ Εὐκλείδειος λόγος φησὶν, ἐξ ἴσου κεῖται τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις,

διά

διὰ τὸ ἐλαχίςην εἶναι τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν. Ει γὰρ εἴη τις ἐλάττων, οὐκ ἐξ ἴσου κεῖσθαι τοῖς πέρασιν ἑαυτῆς. *Sed & Archimedes rectam definivit lineam minimam earum quæ eosdem habent terminos. Quoniam enim (ut ex libro Euclidis conſtat) recta ex æquo ſuis punctis interjacet, propterea etiam minima eſt omnium eosdem terminos habentium. Si enim minor ulla eſſet alia, utiq; prior non ex æquo ſuis terminis interjaceret.* Ex quibus liquet, quomodo Euclidis definitio ſit explicanda ac intelligenda, & quid recta linea Geometris proprie ſit, nempe illa linea, quæ, diſtantiæ, duorum punctorum lineam terminantium, plane eſt æqualis. Dicit autem Euclides rectam hanc ἐξ ἴσου κεῖσθαι τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις, non vero ait τοῖς ἑαυτῆς σημείοις. Nempe Geometræ ſæpenumero ſupponunt rectam lineam in infinitum productam. Quæ autem in infinitum educitur, terminos non habet, adeoque nec puncta terminantia. Inter puncta ergo hujus extrema nulla poteſt ſumi diſtantia, quia puncta ipſa non dantur. Rectæ ergo lineæ infinitæ non conveniret definitio Euclidea, ſi quidem dixiſſet, eam eſſe rectam quæ punctis ſeu extremis ſuis ex æquo interjacet, ſeu quæ diſtantiæ inter ſua extrema æqualis eſſet: cum infinita diſtantia haberi nequeat. Dixit ergo τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις *punctis quæ in ſeipſâ ſumuntur.* Nimirum quocunq; in loco duo puncta in recta linea ſumuntur, diſtantia horum punctorum eſt æqualis rectæ, quæ puncta hæc

Digitized by Google

conjungit: & recta, æqualis diſtantiæ. Liquet igitur ex his mala fide Sextum definitionem Geometricam rectæ lineæ citaſſe, cum ait, rectam eſſe ἥτις ἐξ ἴσου κεῖται τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς μέρεσι *quæ ex æquo partibus in ea ſumptis interjacet.* Aliud enim eſt punctum, aliud pars lineæ. Neque verum eſt quod ait, Geometras explicare rectam lineam per planum, & planum per rectam lineam, hoc eſt circulum committere: utrumque enim falſum eſt. Rectam enim lineam explicant per minimam diſtantiam à ſuis extremis: & planam ſuperficiem, etiam per minimam diſtantiam à ſuis extremis: utrumque optime & ex natura rei. Unica enim linea inter duo puncto ſumi poteſt omnium minima, atque hæc recta eſt. Tum quoque unica tantum ſuperficies inter duas lineas ſumitur, omnium minima, quæ etiam ſuperficies eſt plana. Atq; hæc adeo per ſe clara ſunt ac manifeſta, ut pluribus ea verbis explicare velle, eſſet de communi hominum notitia dubitare.

Nec ſaniora ſunt quæ de natura anguli diſputat. Οἷος δὲ ἐστιν ὁ περὶ τῆς εὐθείας λόγος τοιοῦτος γένοιτ' ἂν καὶ ὁ περὶ τῆς γωνίας. Πάλιν γὰρ ὅταν ὑπογράφοντες λέγωσιν ὅτι γωνία ἐστὶ δυοῖν εὐθειῶν μὴ κατ' ἄλληλα κειμένων τὸ ὑπὸ τὴν κλίσιν ἐλάχιστον. ἤτοι ἐλάχιστον λέγουσι τὸ ἀμερὲς σῶμα, ἢ τὸ κατ' αὐτοὺς σημεῖον καὶ στιγμήν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ἀμερὲς σῶμα οὐκ ἂν εἴποιεν, ἐπείπερ τοῦτο μὲν οὐδὲ εἰς δύο μέρη δύναται διαιρεῖσθαι· ἡ δὲ γωνία κατ'

αὐ-

αὐτοὺς ἐπ' ἄπειρον τέμνεσθαι. καὶ ἄλλως τῆς γωνίας ἣν μὲν μείζονα φασὶν εἶναι ἣν δὲ μικροτέραν. τοῦ δὲ ἐλαχίστου σώματος οὐδέν ἐστι βραχύτερον, ἐπεὶ ἐκεῖνο ἀλλ' οὐ τοῦτο γενήσεται ἐλάχιστον. Λείπεται ἄρα τὸ κατ' αὐτοὺς σημεῖον εἶναι λέγειν. ὃ καὶ αὐτὸ τῶν ἀπόρων. Εἰ γὰρ πάντη πανταχῶς ἀδιάστατόν, οὐ διαιρεθήσεται ἡ γωνία, οὐ μὴν οὐδὲ μείζων τὶς ἔσται ἢ ἐλάσσων γωνία. Ἐν γὰρ τοῖς μηδεμίαν ἔχουσι διάστασιν οὐκ ἂν εἴη τις κατὰ μέγεθος διαφορά. ἄλλως τε εἰ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν πίπτει τό σημεῖον, διορίζει τὰς εὐθείας. διορίζον δὲ οὐκ ἔσται ἀδιάστατον. *Quale autem eſt quod de recta dicitur, tale eſt etiam quod dicitur de angulo. Rurſus enim quando dicunt deſcribentes, Angulus eſt duarum linearum non in directum jacentium, id quod eſt minimum ſub inclinatione: aut minimum dicunt corpus, quod caret partibus; aut quod eſt, ut ipſi volunt, ſignum & punctum. Sed corpus quidem carens partibus non dicent, quoniam id nemo poteſt in duas partes dividere. Angulus autem ut ipſi volunt ſecatur in infinitum. Et alioqui ex angulis alium quidem dicunt eſſe majorem, alium vero minorem. Minimo autem corpore nihil eſt brevius: cum aliàs non illud, ſed hoc minimum tum eſſet. Reſtat ergo ut dicant id quod eſt, ut ipſi cenſent, ſignum: quod ipſum quoque cadit in dubitationem. Si enim ſignum eſt ejuſmodi, ut nullo modo nec ulla ratione ullum ſuſcipiat intervallum ac dimenſionem: non dividetur angulus. ſed nec erit ullus major aut minor angulus. Iis enim quæ nullum habent ſpatium ac dimenſionem, non po-*

poteſt eſſe ulla in magnitudine differentia. Et alioqui ſi inter rectas cadit punctum, diſtingvit rectas Quod autem diſtingvit, non utique caret dimenſione. Sed videtur heic Sextus ut Geometras argueret, ipſe ſibi definitionem confinxiſſe. Sane cum non unum aut alterum Geometrarum de ponte dejicere, ſed totam Geometriæ ſcientiam vanitatis arguere in animo haberet: debebat utiq; illam maxime definitionem oppugnare, tali quæ ab illo Geometra eſſet propoſita, quem cæteri omnes Mathematici pro optimo ac ſolide docto haberent. Euclides quidem multo ante Sextum Empiricum tempore ſua conſcripſerat, magnamque penes omnes Mathematicos auctoritatem obtinuerat. Debebat utique Sextus, cum contra Geometriam in genere aliquid moliretur, optimum in ea ſcientia maximæq; auctoritatis ſcriptorem impugnare. Definit autem Euclides angulum rectilineum his verbis Επίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις. *Planus angulus eſt, duarum, quæ in eodem plano ſunt, linearum, ſe invicem tangentium, & non in directum jacentium, ad invicem inclinatio.* De minimo Sexti nullum heic verbum. Ideoque nec argumentum ipſius contra Geometriam eſt. Sunt tamen quædam in hoc ipſo Sexti argumento falſa, de quibus antea monitum. Proponit vero aliam quoque definitionem quam impugnat. Verum neque eſt Euclidis, ſed aliorum Geome-

metrarum, ut in ſequentibus docebimus. Ἀλλ' εἰώθασί τινες ἐξ αὐτῶν γωνίαν λέγειν τὸ ὑπὸ τὴν κλίσιν πρῶτον διάστημα. *Sed ſolent inquit quidam ex iis angulũ appellare primũ intervallum ſub inclinatione.* At cum alia definitio melior & magis naturæ rei conveniens apud alios Geometras daretur: non debebat ob paucorũ imperitiam tota ſcientia male audire. Atque hæc quidem Sextus contra anguli definitionem proponit, quæ tamen contra Geometras nihil concludunt, cum præſtantiſſimi Geometræ alias definitiones habeant. Quoniam vero nobis propoſitum eſt non ea tantum inquirere quæ ab Sexto contra Mathematicos dicuntur, ſed etiam illa quæ ab aliis vel proponuntur, vel proponi poſſunt: ſequenti capite varias præſtantiſſimorum Mathematicorum ſententias de anguli natura ac definitione in medium adducemus, ut veritas rei omnibus pateat.

CAP. XVI.

Quam difficile ſit atque arduum naturas rerum accurata definitione explicare; illis cognitum eſt qui naturam paulo diligentius ſunt rimati. Vix enim quicquam in tota natura eſt, quod ita definiri poſſit ut nihil in ea definitione ſit vitioſum. Res enim vulgatiſſimæ & ubivis obviæ difficillime cognoſcuntur: ideoque nec facile definiuntur. Lapides natura tanta copia produxit, tantaque varietate, ut vix ullus ſit mortalium qui ignoret, quid lapis ſit. Nemo tamen per-

ectam omnibusq; numeris abſolutam lapidis definitionem unquam dedit, aut dare poteſt. Quid humano generi magis neceſſarium, ideoque majori copia à divite natura procreatum, quam fruges & fructus? Neque tamen vel tritici, vel ſecalis, vel hordei accuratam definitionem quisquam mihi dederit. Deſcriptiones quidem qualescunque harum aliarumque rerum habentur, & definitiones quas vocant cauſales: tales vero quales jure debebant eſſe, aut quæ naturam harum perfecte explicant, non dantur: eò quod natura ipſa perfecte cognità non eſt. Quot plantæ, arbores, gemmæ in natura exſtant, quarum ſola exterior ſpecies & figura cognita eſt? cætera latent, ideoque nec ullo modo talium rerum definitio dari poteſt. Neque tamen ideo quisquam ſanus hæc in natura eſſe negaverit, aut nihil plane eſſe dixerit, ipſorũve externa accidentia ut falſa damnaverit: eo quod accurata rei definitio cognita non ſit. Ita quoque in Geometria non ſequitur, angulum nihil eſſe, aut vanam de quantitate anguli quæſtionem à Geometris moveri; eo quod natura & eſſentia angulorum cognita non ſit, vel ſaltem verbis plene atque accurate explicari nequeat. Ipſimet quidem Veteres Geometræ non conveniunt in definitione anguli, neque ſatis accurate explicare poſſunt, ad quod prædicamentum referri debeat, cum in tanta angulorum diverſitate non omnes ſub eodem genere comprehendi poſſe videantur. Notatum hoc Proclo, & ab eodem conciliatio atque explicatio hujus difficul-

Digitized by Google

cultatis quæſita, commentario in hanc definit. Euclidis. Neque tamen omni ex parte mihi ſatisfacit. Quicquid ſit, de angulo conſtat, eum in natura rerum eſſe, & omnino unum angulum altero eſſe majorem, quod Geometræ ſupponunt. Nam operoſa illa quæſtio de natura & definitione anguli Geometræ neceſſaria non eſt. Sufficit noviſſe quam rem Geometra voce anguli deſignet: quod quidem ex deſcriptione ab Euclide allata ſatis liquet. Aliud ergo eſt quærere an angulus ſit: aliud, quid ſit, & in quo prædicamento. Geometræ ſupponunt angulum eſſe: unumque angulum altero majorem. Quod ſane neque ab ullo mortalium negari poteſt. Naturam quoque anguli eo modo explicant, ut plenior cognitio illius rei Geometræ non ſit neceſſaria. Atque in his conveniunt Geometræ. Quando vero de eo diſputatur in quo prædicamento angulus ſit, jam non ulterius Geometrica quæſtio agitur, ſed Logica vel Metaphyſica. Hoc ergo quod Sextus urget contra Geometras, non Mathematicum eſt: ſed Logicum aut Metaphyſicum.

Ut vero omnis ſcrupulus Lectori eximatur, placet hanc quoque controverſiam paucis abſolvere. Eudemus Peripateticus in libro quem de angulo ſcripſit, in prædicamento Qualitatis angulum eſſe exiſtimabat, ſi quidem fides habenda erit Proclo, cujus verbis potius quam meis hæc proponam. Lib. II. comment. in I Euclidis. Εὔδημος μὲν ὁ Περιπατητικὸς βιβλίον περὶ γωνίας γρά-

ψας

ψας ποιότητα αὐτὴν εἶναι συνεχώρησεν. Γένεσιν γὰρ γωνίας ἐπινοῶν οὐκ ἄλλην εἶναι φησὶν ἢ τὴν κλίσιν τῶν γραμμῶν. Εἰ δὲ ἡ εὐθύτης, ποιότης, καὶ ἡ κλάσις, ποιότης, ἐν ποιότητι ἔχουσαν αὐτὴν τὴν γένεσιν πάντως εἶναι ποιότητα. *Eudemus quidem Peripateticus librum de angulo ſcribens, in Prædicamento Qualitatis eum eſſe affirmavit. Cum enim anguli ortum ac conſtitutionem conſideraret, non aliud angulum eſſe pronunciabat quam linearum inclinationem. Si vero rectitudo eſt qualitas, & fractio quoque eſt qualitas; utique angulus, cujus conſtitutio in qualitate conſiſtit, omnino erit qualitas.* Verum multa ſunt ex quibus probari poteſt angulum non eſſe qualitatem. Nunc quidem ea tantum recenſebo, quæ à Proclo adferuntur paulo ante hæc verba. Καὶ αἱ γωνίαι ποιότητες δῆλον ὅτι οὐκ ἂν εἶεν. Τῆς γὰρ ποιότητος τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον οἰκεῖα πάθη, καὶ οὐ τὸ ἴσον καὶ ἄνισον. ἔδει τοίνυν μὴ λέγειν ἀνίσους γωνίας, καὶ τὴν μὲν μείζονα, τὴν δὲ ἐλάττονα, ἀλλ' ἀνομοίους, καὶ τὴν μὲν μᾶλλον γωνίαν, τὴν δὲ ἧσσον. Ταῦτα δὲ ὅτι τῆς τῶν Μαθημάτων ὑπάρξεως ἐστὶν ἀλλότρια παντάπασι καταφανές. Πᾶσα γὰρ γωνία τὸν αὐτὸν ἐπιδέχεται λόγον, καὶ οὐχὶ ἡ μέν ἐστι γωνία μᾶλλον, ἡ δὲ ἧσσον. *Quod vero anguli qualitates non ſint manifeſtum. Qualitatis enim propria affectio eſt, ſuſcipere magis ac minus; non vero æquale eſſe aut inæquale. Alioqui, non oportebat dicere angulos eſſe inæquales, & unum quidem majorem alterum vero minorem:*

ſed

Digitized by Google

ſed dicendum foret angulos eſſe diſſimiles, & hunc quidem magis eſſe angulum, illum vero minus. At vero hæc Mathematicæ conſtitutioni plane contraria eſſe, manifeſtum eſt. Omnis enim angulus eandem habet rationem, neque unus magis eſt angulus, alter vero minus. Plura non addam: cum ex his clarum ſit, angulum in prædicamento qualitatis non eſſe. Verum neq; ad quantitatem referri debet: neque angulus magnitudo dici. Placuit id quidem Plutarcho Mathematico, qui ante Apollonium floruit, ipſumq; Apollonium in eam ſententiam ſecũ pertraxit, ut ex eodẽ Proclo diſcimus, qui etiam definitionem illam anguli nobis dederunt, quam Sextus ultimo loco adfert, quamvis verbis nonnihil immutatis. Ποσότητα δὲ λέγουσιν αὐτὴν ὅσοι φασὶν τὸ πρῶτον διάστημα ὑπὸ τὸ σημεῖον εἶναι τὴν γωνίαν· ὧν καὶ ὁ Πλούταρχος ἐστιν εἰς τὴν αὐτὴν δόξαν συνωθῶν καὶ τὸν Ἀπολλώνιον. Δεῖ γὰρ εἶναί τι φησὶ διάστημα πρῶτον ὑπὸ τὴν κλάσιν τῶν περιεχουσῶν ἐπιφανειῶν. *Angulum vero quantitatem illi dicunt, qvibus definitur, primum intervallum ſub puncto. Inter quos eſt Plutarchus, ipſum quoque Apollonium in eam compellens ſententiam. Dicunt enim, oportere aliquod intervallum primum eſſe, inter ſectionem linearum aut ſuperficierum, quæ angulum comprehendunt.* Sed hæc ſententia non tantum ab ipſo Sexto ſatis bene refutatur, ut antea vidimus, verum etiam à Proclo paucis verbis rejicitur. Ita enim ait. Καίτοιγε συνεχοῦς ὄντος τοῦ ὑπὸ τὸ σημεῖον δια-

στήματος, ἀδύνατον τὸ πρῶτον λαβεῖν. Ἐπ' ἄπειρον γὰρ πᾶν διάστημα διαιρετόν· πρὸς τῷ καὶ ἐὰν ὁποσοῦν ἀφορίσωμεν τὸ πρῶτον, καὶ δι' ἐκείνου γωνίαν ἀγάγωμεν, γίγνεσθαι τρίγωνον, ἀλλ' οὐ μίαν γωνίαν. *Enimvero ſi intervallum illud quod ſub puncto eſt continuum fuerit, primum nulla ratione ſumi poteſt. Omne enim intervallum in infinitum dividitur. Propterea, ſi quantumcunque intervallum ſumamus, illudque ut primum ſeparemus, angulum per id ducentes, fit triangulum, non vero unus angulus.* Verba Procli paulo ſunt obſcuriora, ideoque paucis ea explicabimus. In figur. n. II. ſi angulus CAB dicatur intervallum primum ſub puncto, erit ergo vel CB, vel FH, vel KI, vel MN, vel PQ, vel ST, vel XY, vel αβ, vel δε, vel ſi in infinitum progrediaris, ſpatiũ tribus quibuscunq; lineis comprehenſum, quarum duæ ſunt partes linearum AC & AB. tertia autem alia quædam recta. At vero tale ſpacium non unum dat angulum, ſed integram format figuram, nempe triangulum. Quodcunque ergo intervallum ab intervallo CAB, ablatum fuerit, anguloq; CAB attributum: id non angulum formabit, ſed triangulum, nempe vel AFH, vel AKI, vel AMN, & ſic in infinitum. Neque ullum intervallum ſumi poteſt primum, cum totum hoc intervallum in infinitum dividatur. At in infinito nihil eſt primum: cum eo ſemper aliud prius dari poſſit; ſi quidem diviſio in infinitum procedat. Quod ſi intervallum hoc continuum ſumatur, neque dividatur; tum nihil in eo primum eſt, quandoquidem

omnia

Digitized by Google

omnia ſimul ſunt. Mala eſt ergo & Plutarchi & Apollonii definitio, ab ipſis Geometris rejecta: ideoque non opus fuiſſet hanc ut Geometricam à Sexto refutari. Carpus vero Antiochenus angulum quidem ad quantitatem retulit, nec tamen, vel ſuperficiem, vel lineam eſſe voluit, quod recenſet & uno verbo refutat Proclus. Κάρπος δὲ ὁ Ἀντιοχεὺς πόσον μὲν εἶναί φησι τὴν γωνίαν καὶ διάστημα τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν γραμμῶν ἢ ἐπιφανειῶν· καὶ ἐφ᾽ ἓν διεστὼς τοῦτο, μὴ μέντοι διὰ τοῦτο γραμμὴν εἶναι τὴν γωνίαν. οὐ γὰρ πᾶν τὸ ἐφ᾽ ἓν διαστατὸν ὑπάρχειν γραμμήν. Τοῦτο δὲ πάντων παραδοξότατον, εἰ ἔστι τι μέγεθος ὑφ᾽ ἓν διαστατὸν ἔξω γραμμῆς. *Carpus vero Antiochenus angulum quidem quantum eſſe dicit, & intervallum linearum aut ſuperficierum quæ eum comprehendunt. Et hoc quidem intervallum juxta unum punctum diſtare: nec tamen ideo lineam eſſe. Hoc vero omnium maxime abſurdum eſt: dari magnitudinem, quæ juxta unum punctum diſtat, neque tamen ſit linea.* Proclus rem unico tantum verbo indicare voluit, nimirum, perabſurdum eſſe, ſi quis vellet affirmare, ullam magnitudinem, præter lineam ſeu longitudinem, in iis poſſe conſiderari, quæ diſtant quidem invicem, ſed tamen juxta unicam menſuram. Angulum vero magnitudinem non eſſe vel hinc patet. Si enim magnitudo eſt: ergo cum alia magnitudine poteſt conferri. Quæ vero comparantur invicem, habent quoque rationem inter ſe. Magnitudines autem quæ rationem invicem habent, poſſunt ſe invicem exedere ſi

ſi multiplicentur: per Def. IV. libr. V. Elem. Eucl. Ergo ſi angulus eſt magnitudo, poteſt etiam multiplicatus quemcunque alium angulum excedere, idque in infinitum, & tamen ſemper erit angulus. At in figura numero. V. ſi angulus EBL triplicetur, excedit quidem angulum EB: ſi vero quadruplicetur, deſinit eſſe angulus. Lineæ enim EB&BF in directū jacent, adeoq; angulum non conſtituunt. Quod ſi quintupletur educta recta BL. in ϱ. erit EBϱ angulus æqualis LBF angulo, utpote ad verticem. Exterior vero angulus deſinet eſſe id quod erat. Hoc idem argumentum, ſed in angulis cornutis, demonſtratum habes, apud Proclum, loco laudato, quod inde peti poteſt. Angulus ergo non eſt quantitas.

Verum neque in Prædicamento Relationis eſt. Si enim angulus nil aliud eſſet quam relatio, utique in unoquovis angulo, unica tantum atque eadem eſſet relatio. Unus enim idemque angulus unam eandemq; faceret relationem. At in angulis mixtis v. g. ex recta linea & circulari, vel eo, quem cornutum vocant, alia eſt relatio rectæ lineæ ad circularem, & alia circularis ad rectam. Cum ergo duplex ſit relatio, ergo idem angulus non unus eſſet angulus ſed duplus, ſive duo anguli: quod eſt abſurdum. Proclus hæc alio exemplo demonſtravit, ex hemicono deducto, cujus angulus verticalis componitur ex angulo trianguli plani, & ipſius prætcrea ſuperficie coni. Sed noſtra demonſtratio clarior eſt. Non eſt ergo angulus in prædicamento Relationis.

Digitized by Google

nis. Neq; tamen verũ illud videtur quod Proclus affirmat, Euclidem, eosq; omnes, qui angulum inclinationem definiunt, in Prædicamento Relationis ipſum poſuiſſe. Εὐκλείδης δὲ καὶ ὅσοι κλίσιν εἰρήκασιν ἐν τοῖς πρός τι καταλέγουσι. *Euclides vero, & quotquot inclinationem* angulum *dixerunt inter relata ponunt*. Sane nusquam hoc dixit Euclides: ſaltem, inter ea opera, quæ exſtant, id nusquam legitur. Neque vero inclinatio ad Prædicamentum Relationis proprie ſpectat, ſed ad illud, quod Latini vocant prædicamentum Situs: Ariſtoteli dicitur κεῖσθαι. Eſt enim omnis incliatio ſitus aliquis, quæ ſi fuerit duarum rectarum linearum in eodem plano, oritur angulus planus rectilineus: ſi fuerit duarum linearum curvarum, oritur angulus curvilineus. Quod ſi fuerit trium pluriumve ſuperficierum, oritur angulus ſolidus. Quoniam vero in ſitu varia conſiderantur, nempe, res ipſæ quæ ſitum habent, & diſtantiæ rerum, quæ in tali ſitu ſunt: etiam iſta accidentia anguli in aliis prædicamentis conſiderantur. Neq; novũ eſt, eandem rem in uno quidem prædicamento eſſe, pro varia autem conſideratione etiam in diverſis poni. Sic triangulum, quatenus talem habet figuram, eſt in prædicamento qualitatis: quatenus vero talem talemve magnitudinem habet, in prædicamento quantitatis conſideratur. Ita ergo angulus quatenus ex rectis curvisve lineis componitur, eſt vel rectilineus vel curvilineus, adeoque in prædicamento qualitatis: quate-

nus vero, inter latera angulum comprehendentia, majus minusve ſpatium fuerit, eſt in prædicamento quantitatis, & quantitatem vere habet. Quibus conſideratis omnia clara ſunt ac perſpicua: adeoque omnes Sexti objectiones vanæ.

Duas quidem adhuc ad finem operis ſui in medium adducit, quarum tamen utraq; ex dictis facillime refutatur. Una eſt contra Definitionem circuli: altera contra propoſitionem x. lib. I Elem. Euclidis. Contra circulum ait, ſublatis omnibus lineis, neq; circulum quicquam eſſe, quod quidem contra omnes figuras cæteraſque omnes definitiones valeret, ſiquidē ullius precii foret. Sed triumphum ante victoriam agere ſtultorum eſt. Nos demonſtravimus, non tantum puncta, lineas & ſuperficies vere in natura eſſe, ſed etiam Sexti argumenta ne ſapiente quidem homine digna. Cum ergo & lineæ omnis generis, & puncta, & ſuperficies vere concipiantur à Geometris: certum etiam eſt, non tantum circulum, ſed & cæteras omnes figuras concipi recte poſſe, earumque definitiones omnibus modis veras eſſe.

Illud quoque quod contra X. Propoſitionem lib. 1. Elem adfertur tale eſt, ut à quovis ſolvi poſſit, qui priora accurate perlegerit. Argumentum Sexti eſt. Ὅταν οὖν λέγωσιν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν δίχα τεμεῖν ἤτοι τὴν ἐπὶ τοῦ ἄβακος δεδομένην λέγουσι διχοτομεῖν, ἢ τὴν ἀπὸ ταύτης κατὰ μετάβασιν νοουμένην. Οὔτε δὲ τὴν ἐπὶ τοῦ ἄβακος δοθεῖσαν δι-

χο-

χοτομεῖν ἐροῦσιν. αὕτη γὰρ μῆκος καὶ πλάτος αἰσθητὸν ἔχειν φαίνεται. ἡ δὲ κατ' αὐτοὺς εὐθεῖα γραμμὴ μῆκός ἐστιν ἀπλατές. ὥστε μὴ οὖσα κατ' αὐτοὺς ἡ γραμμὴ ἡ ἐπὶ τοῦ ἄβακος, οὐδὲ δίχα τμηθήσεται, ὡς γραμμή. Καὶ μὴν οὐδὲ ἡ ἀπὸ ταύτης κατὰ μετάβασιν νοουμένη. Ὑποκείσθω γὰρ λόγου χάριν ἐξ ἐννέα στιγμῶν συνεστῶσα ἀφ' ἑκατέρου μὲν τῶν ἄκρων τεσσάρων καὶ τεσσάρων ἀριθμουμένων, μιᾶς δὲ τὰς δύο τετράδας μεσολαβούσης στιγμῆς, οὐκοῦν εἰ δίχα τέμνεται ἡ ὅλη γραμμὴ, ἤτοι μεταξὺ ταύτης τῆς πέμπτης στιγμῆς καὶ τῆς ἑτέρας τετράδος φέρεσθαι τὸ τεμνὸν, ἢ κατ' αὐτῆς τῆς πέμπτης, ὥστε καὶ αὐτὴν διχάζειν. Τὸ μὲν οὖν μεταξὺ τῆς πέμπτης στιγμῆς καὶ τῆς ἑτέρας τετράδος φέρεσθαι τὸ τεμνὸν, τῶν ἀτόπων. γενήσεται γὰρ ἄνισα τὰ τμήματα, καὶ τὸ μὲν ἐκ τεσσάρων στιγμῶν, τὸ δὲ ἐκ πέντε. Το δὲ αὐτὴν διχάζειν τὴν στιγμὴν, πόλλῳ τοῦ προτέρου ἀλογώτερον. οὐκέτι γὰρ ἀδιάστατον ἀπολείψουσι σημεῖον ὅγε διχάζεται πρὸς τοῦ τεμνόντος. *Quando ergo dicunt datam rectam in duas partes ſcindere, aut eam ſcindere docent quæ in abaco eſt, aut eam quæ per tranſitum hujus intelligitur. Sed eam quæ in abaco eſt bifariam dividi non dicent, cum ea manifeſtam habeat latitudinem. Recta autem ex eorum ſententia omnis eſt expers latitudinis. Quare cum illa quæ in abaco eſt, linea ex ipſorum ſententia non ſit, neque illa ut linea in duas partes ſecabitur. Verum neq; illa quæ per tranſitum hujus intelligitur. Ponatur enim aliqua con-*

conſtans ex novem punctis, quatuor quidem punctis ab utroque extremorum numeratis, uno autem puncto duos quaterniones intercipiente in medio. Ergo ſi in duas partes tota ſcinditur linea, aut inter quintum hujus punctum, & alterum quaternionem feretur id quod ſecat, aut in ipſo quinto, ita ut eum dividat biſariam. Atque ferri quidem inter quintum punctum & alterum quaternionem id quod ſecat, à ratione eſt alienum. Tum enim ſegmenta forent inæqualia, unum quidem quinque punctorum, alterum vero quatuor. Ipſum autem punctum in duas ſecari partes eſt magis abſurdum quam prius. Neque enim punctum amplius erit indiviſibile, omnibusque carens partibus. Verum antea manifeſtiſſime demonſtravimus lineam ex punctis nullo modo componi: tum quoque maximam minimamque lineam æqualia numero puncta habere, hoc eſt in una, tot ſumi poſſe puncta, quot in alia. Denique ſi mille puncta jungantur invicem, unicum tantum punctum conficere, adeoque ſi eadem mille puncta ita in unum compoſita divellantur invicem, punctum tamen eſſe indiviſibile. Sophiſma ergo Sexti de novem punctis, ne hili quidem eſt, cum nulla uſquam ſit linea in qua infinita numero puncta ſumi non poſſint, adeoque in illa quæ novem puncta habet, poſſint & mille puncta concipi. Et cum linea neutro modo ex punctis componatur, utique, nec in biſectione una pars longior ſit altera, neque punctum dividatur. Illud quoque quod Sextus ait de centro circuli, quod in circuli diviſio-

viſione, bifariam dividatur, falſum plane eſt. Neque enim ſuperficies ex punctis componitur, imo ne ex lineis quidem, ut antea fuit demonſtratum. Ideoque non ſequitur, quod, circulo ſeu ſuperficie plana circulari bifariam diviſa, etiam centrum ſeu punctum bifariam dividatur. Hæc ergo omnia falſis hypotheſibus nituntur, nullamq; ſolidam demonſtrationem continent. Atq; ita quidem ea omnia quæ à Sexto Empirico contra Geometras proponuntur accurate examinavimus & falſa vanaq; omnia eſſe deprehendimus. Nunc de cæteris veritatibus Geometricis porro agendum erit.

CAP. XVII.

Hactenus quidem materiam Geometricam examinavimus, earumque rerum definitiones percurrimus, quæ à Geometris conſiderantur: qua quidem re id præſtitimus, ut non tantum ea quæ à Sexto Empirico adverſus Geometras ſcripta ſunt, vanitatis ac falſitatis convincantur, ſed & earum rerum natura, quæ in Geometricis conſideratur, certo cognita ſit ac demonſtrata. Nam cum conſtet, puncta, lineas, ſuperficies & angulos omnis generis non tantum vere exiſtere, ſed etiam id eſſe, quod Geometræ ſupponunt: utique & manifeſtum erit, quæ ex his componuntur triangula, quadrata, pentagona. &c. aut quæ hæc ſupponunt, ut parallelæ lineæ, in natura exiſtere. Certum quidem eſt Euclidem totam materiam Geometricam definitionibus heic non explicaſſe, cum ſibi

Digitized by Google

ſufficere arbitraretur, ſi ea tantum de quibus tractare vellet, Lectori ob oculos poneret, ipſique paucis definitionibus indicaret quas res talibus verbis denotaret. Neque ſane dixerim, hæc ita ab Euclide fuiſſe præſtita, ut nihil deſideretur. Nam ut alia omittam, in demonſtrationibus quidem ſæpiſſime meminit linearum in directum jacentium, quarum tamen definitionem nusquam invenies. Quod ſi dixeris propria vocis nomenclatura id indicari: reſpondebo idipſum quoque in Triangulo, pentagono, aliisque fieri; quorum tamen definitionem ὁ στοιχειώτης dedit. Et quam neceſſaria ſit definitio linearum in directum jacentium, poſtea manifeſtum faciemus. Hac ergo forte in parte, aliquo modo, carpi poſſet Euclides, quod rerum neceſſariarum definitiones omiſiſſet. Sed nulli via veritatis occluſa eſt; omnibus adhuc patet, ſemperque patebit. Multa ſane Euclides præſtitit, & plura quam ullus alius, quorum lucubrationes in eo ſcribendi genere habemus. Sed poſt tantam meſſem, aliquod dari ſpicilegium, quid mirum? Id ſane cuivis veritatis amanti ſufficit, quod nihil falſi Euclides ſuppoſuerit, neque in tanta demonſtrationum copia, ullum paralogiſmum fecerit; quod cæteri vix ſunt aſſeqvuti. Fateor quidem, ipſum quoque Euclidem alicubi id ſupponere, quod neque tam clarum eſt, ut ſupponi aut pro conceſſo aſſumi debeat, neque ab ipſo ſit demonſtratum. Id tamen quod ſupponit falſum non eſt. Et quamquam ab ipſo demonſtratum non ſit, ab aliis tamen

men

mẽ facili via, nulloq; labore demonſtrari poteſt, ut poſtmodũ docebimus. Ac tantum quidem de definitionibus I. libri Elementorum dicta ſunto. Quod enim cæterorum librorum definitiones attinet, de iis ſequenti libro dicendum. Hoc vero ea omnia pertexere nobis animus eſt, quæ contra primum Elementorum Euclidis ab ullo unquam mota fuere, vel jure moveri poſſunt. Et cum principio hujus ſcriptionis, hypotheſes Geometricas in Definitiones, Poſtulata atque Axiomata diviſerimus, atque Definitionum naturam hucusque ſatis accurate explicuerimus: nunc de Axiomatibus ac Poſtulatis agemus.

CAP. XVIII.

Axiomata quidem, proprie & accurate loquendo, ſola & præcipua eſſe demõſtrationis Geometricæ principia, in confeſſo eſt: quæ ideo talia eſſe oportet, ut ab nemine ſano negari poſſint. Et priora quidem IX. Euclidis, talia omnino eſſe, nemo ſapiens unquã negaverit. Quis enim ſana mente præditus, has veritates omnes & ſingulas certiſſimas eſſe non perſpexerit? Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ ἐστὶν ἄνισα. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἀλ-

Digitized by Google

λήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐςί. Καὶ τὸ ὅλον τȣ̃ μέρȣς μεῖζον ἐςί. *Quæ eidem æqualia, etiam inter ſe ſunt æqualia. Et ſi æqualibus æqualia addantur, tota fieri æqualia. Et ſi ab æqualibus æqualia auferantur reſidua eſſe æqualia. Et ſi inæqualibus æqualia apponantur, tota eſſe inæqualia. Et ſi ab inæqualibus auferantur æqualia, reſidua eſſe inæqualia. Et ejusdem dupla inter ſe eſſe æqualia. Et ejusdem dimidia etiam inter ſe eſſe æqualia. Et quæ congrunnt invicem, inter ſe ſunt æqualia. Totum majus ſua parte.* Sunt enim hæc omnia natura cognita, & cum divinæ auræ particula, omnibus & ſingulis hominibus implantata. Si enim accurate omnia & ſingula perſcrutemur, magnoque & diligenti ſtudio humanas actiones cum brutorum animantium comparemus, certo deprehendemus, nihil eſſe quo quidem ceu certa ac infallibili nota & charactere, illæ ab his diſtingvi poſſint, niſi ſolius veritatis & ſapientiæ cognitione atque amore. Primæ autem veritates, vel ſaltem inter primas, hæ ſunt, quas nunc ex Euclide propoſuimus. Scio quidem Claudium Galenum libro de optimo genere docendi περὶ ἀρίςης διδασκαλίας de Carneade Academico referre ne ipſum id quidem pro vero habuiſſe quod primo loco ponimus, Nempe quæ eidem æqualia etiam inter ſe ſunt æqualia. Ὁ γȣ̃ν Καρνεάδης ȣ̓δὲ τȣ̃το τὸ πάντων ἐναργέςατον συγχωρεῖ πιςέυειν, ὅτι τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα μεγέθη, καὶ ἀλλήλοις ἴσα γίγνεται. *Carneades itaq; neq; illud quod omnium eſt evidentiſſimum concedit eſſe credendum. Quæ eidem æquales ſunt magnitudi-*

nes

nes etiam inter ſe ſunt æquales. Verum iſta objectio ne refutatione quidem digna eſt. Inſani enim hominis deliria ſi quis confutare & falſitatis convincere vellet, næ is ſapientioribus irriſui eſſet. Compeſcenda quidem aliquando horuncce hominum impudentia & audacia, quod & egregie in laudato nunc opere præſtitit Galenus, cujus rationes ideo nos non adferemus, ne aliorum ſcrinia compilare velle videamur. Neque tamen ideo cum hiſce diſputandum, ut veritas demonſtretur: Id enim impoſſibile, (Primæ enim veritates nullo modo demonſtràri poſſunt) ſed tantum, ut ſtultitia & dementia talium hominum omnibus ob oculos ponatur, cæterique qui inſanire volunt deterreantur. Hæc ergo omnia quæ recenſuimus Axiomata talia ſunt, ut nec demonſtrari poſſint, neq; à quoquam falſitatis redargui aut convinci. Præter iſta vero quædam alia axiomata proponuntur quæ ſane non eandem habent naturam. Quamvis enim vera ſint, tamen non ita natura cognita ſunt ut priora; neq; ſine demonſtratione vera eſſe deprehenduntur. Sunt vero hæc. Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλοις εἰσί. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον, συμπεσοῦνται ἀλλήλοις ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι. *Omnes recti anguli inter ſe ſunt æquales. Et ſi in duas rectas recta incidens internos & verſus eaſdem partes na-*

angulos minores ſecerit duobus rectis, concurrent illæ duæ rectæ, ſi in infinitum educantur, verſus illas partes, ubi ſunt duo anguli duobus rectis minores. Et duæ rectæ lineæ ſpatium ſeu ſuperficiem non comprehendunt. Prima enim harum vera quidem eſt, ſed tamen ſine demonſtratione vera eſſe non intelligitur. Sane propoſitio XX. lib. I. Elem. *Duo latera ejusdem trianguli rectilinei, majora ſunt reliquo quomodocunque ſumpta* non minus clara eſt ac certa quam hæc aſſertio. *Omnes anguli recti inter ſe ſunt æquales.* Epicurei quidem affirmabant illam quam nunc laudavimus propoſitionem, adeo claram eſſe: ut etiam aſinus, qui demonſtrationes Geometricas non intelligit, hoc per ſe perſpiciat, ideoque irridebant Geometras, qui tam manifeſta demonſtrarent. Auctor Proclus libr. III. comm. in I. Euclid. ad hanc ipſam Propoſitionem. Verum de Epicureis alibi videndum. Id tantum dico, cum Euclides hanc tam claram ac evidentem veritatem ſine demonſtratione proponere noluerit, debebat utique illa etiam demonſtraſſe, quæ his clariora non ſunt, imo quorum veritas magis in obſcuro eſt. Veritas autem hujus ſententiæ *Si in duas rectas recta incidens angulos internos ad easdem partes minores fecerit duobus rectis, tum rectas illas concurrere, ſi in infinitum producantur, verſus illas partes, ubi ſunt anguli duobus rectis minores*, eſt magis intricata, imo multo obſcurior, quam hæc *Omnis trianguli rectilinei, duo latera, tertio majora, quomodocunque ſumpta.* Saltem

illa

illa aſſertio nullo modo inter Axiomata aut κοινὰς ἐννοίας poni debet, quod neque ab Euclide factum arbitror. Proclus enim inſignis & pervetuſtus commentator Euclidis, inter poſtulata hæc fuiſſe poſita ſubindicat, præter ult:mum quod pro axiomate recenſet. Ipſemet vero partim ex aliorum mente, partim juxta propriam ſententiam adſtruit inter poſtulata non debere poni. lib. III. comment. in I. Euclid. Δῆλον, ὅτι τὸ, πάσας ὀρθὰς εἶναι ἴσας τὰς γωνίας, οὐκ ἔστιν αἴτημα, οὐδὲ τὸ πέμπτον, τὸ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα τις ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς εὐθείας συμπίπτειν ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι. Κατὰ δὲ τὸ δεύτερον οὐκ ἔσται ἀξίωμα το, δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν ὃ καὶ νῦν τινες ὡς Ἀξίωμα προσγράφουσι. *Manifeſtum eſt, quod hoc, Omnes anguli recti inter ſe ſunt æquales, Poſtulatum nequaquam ſit: ſicut neque quintum poſtulatum, ſi in duas rectas recta incidens, internos & ad easdem partes angulos minores fecerit duobus rectis, tum lineas iſtas eductas concurrere verſus eas partes, ubi ſunt anguli duobus rectis minores. Juxta ſecundam vero rationem non erit axioma, Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt, quod etiam nunc quidam inter axiomata recenſent.* Ex quibus liquet, tres haſce aſſertiones ſeu enunciationes inter Axiomata ab Euclide poſitas non fuiſſe, ſed primam quidem & ſecundam inter Poſtulata, fuiſſeque hanc, poſtulatum quintum,

Digitized by Google

tum, ultimam vero à quibusdam, tantum inter axiomata relatam. Videtur autem Theo Alexandrinus, vel ſaltem ejus domeſtici, familiares aut diſcipuli, hæc omnia inter Κοινὰς ἐννοίας poſuiſſe & pro axiomatibus habuiſſe. Græcus enim Textus Euclidis quem hodie legimus, eſt ἐκ τῶν Θέωνος ζυνουσιῶν. *Ex editione familiarium Theonis*, ut in ipſius operis titulo cernitur. Quicquid ſit, certum quidem eſt inter Axiomata hæc non poſſe collocari, cum axiomata debeant eſſe αὐτόπιστα & ἀναπόδεικτα, *per ſe credibilia & non demonſtrabilia*: qualia quidem hæc noſtra non ſunt. An vero inter Poſtulata poni debeant ſequenti capite diſpiciemus.

CAP. XIX.

Qui veritates rerum inveſtigare volunt id accurate obſervabunt, ne vel in manifeſtis veritatibus demonſtrationes quærant, vel non manifeſtas & claras ſine demonſtrationibus admittant. Utroque enim modo certitudo atque evidentia tollitur, priori quidem, quod, ad certiſſimarum rerum demonſtrationem, minus certa ſupponere cogamur: poſteriori vero, quod ex incertis certa demonſtrari nequeant. Virtus autem in medio conſiſtit, quæ neque in infinitum demonſtrationes quærit, neque neceſſarias negligit. Peccarunt vero in his duo inſignes Mathematici Apollonius quidem in exceſſu, Euclides vero in defectu. Is enim dú certiſſima axiomata, demonſtrare conatur, & quæ ipſum naturæ lumen vera eſſe docet: alia ſupponere co-

Digitized by Google

cogitur, minus clara certaque. Euclides autem dum alia non minus clara, imo ejusdem plane generis demonſtrat, quædam vero ſupponit ut axiomata, increpationem & cenſuram aliorum non effugit. Verba Procli ſunt comm III. in I. Elem Euclidis. Μάτην οὖν τῶν Ἀξιωμάτων Ἀπολλώνιος ἐπεχείρησεν ἀποδείξεις ἀποδιδόναι. Ὀρθῶς γὰρ καὶ ὁ Γεμῖνος ἐπέστησεν ὅτι οἱ μὲν τῶν ἀναποδείκτων ἀποδείξεις ἐπενόησαν, καὶ ἀπὸ ἀγνωστέρων μέσων τὰ γνώριμα πᾶσι κατασκευάζειν ἐπεχείρησαν· ὃ δὴ πέπονθεν ὁ Ἀπολλώνιος δεικνύναι βουλόμενος, ὅτι ἀληθές το ἀξίωμα τὸ λεγόν· τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι. Οἱ δὲ καὶ τὰ ἀποδείξεως δεόμενα ἐν τοῖς ἀναποδείκτοις προσειλήφασιν, ὡς αὐτὸς Εὐκλείδης τό τε πέμπτον αἴτημα καὶ τὸ τέταρτον. Καὶ γὰρ τοῦτο τινες ὡς αμφίβολον, ἀποδείξεως δεῖσθαί φασι. Καὶ πῶς γὰρ οὐ γελοῖον, ὧν τὰ ἀντίστροφα θεωρήματα ἐστὶν ἀπόδεικτα, ταῦτα ὡς ἀναπόδεικτα προστάττειν. Ὅτι γὰρ τῶν συμπιπτουσῶν εὐθειῶν αἱ ἐντὸς (perperam in edito legitur ἐκτὸς) ἐλάττους εἰσὶ δυοῖν ὀρθοῖν, αὐτὸς ὁ Εὐκλείδης δείκνυσιν ἐν ἐκείνῳ θεωρήματι. Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσὶ πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Ἀλλὰ καὶ ὅτι οὐ πάντως ἡ τῇ ὀρθῇ ἴση ὀρθὴ ἐστιν, δείκνυται σαφῶς. Οὐκ ἄρα ἀναπόδεικτα τούτοις ἀντιστρέφοντα συγχωρητέον φησὶν ὁ Γεμῖνος. Ἔοικεν οὖν, κατὰ τὴν τούτου διάταξιν, τρία μὲν εἶναι αἰτήματα, τὰ λοιπὰ δύο δεῖσθαι τῆς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης, αὐ-

τά τε καὶ τὰ ἀντιστρέφοντα αὐτοῖς. Ἐν δὲ τοῖς ἀξιώμασι, τὸ δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν, προσκεῖσθαι περίττως· εἴπερ δὴ ἀποδείξεως ἔχει τὸ πιστόν. *Fruſtra ergo demonſtrationem Axiomatum molitus eſt Apollonius. Vere enim Geminus ait, eos qui indemonſtrabilia demonſtrare ſunt conati, ex incertis & incognitis, omniũ clariſſima & maxime cognita probare voluiſſe. Quod & ipſi Apollonio evenit, dum id demonſtrare vult quod dicitur. Quæ eidem æqualia, etiam inter ſe ſunt æqualia. Quidam vero & ea quæ demonſtrari debent, ut indemonſtrabilia ſuppoſuerunt, inter quos Euclides, qui hoc modo quartnm & qvintum Poſtulatum ſuppoſuit. Utrumque enim ut dubium demonſtratione quidam indigere affirmarunt. Et nonne ridiculum eſt, hæc ut indemonſtrabilia ſupponere? cum inverſa horum theorematum demonſtrentur. Nam quod duo interni anguli linearum concurrentiũ minores ſint duobus rectis, ipſemet Euclides demonſtravit hoc Theoremate. Omnis trianguli duo anguli minores ſunt duobus rectis; quomodocunque ſumpti. Verum quod neq; ſemper omnis angulus æqualis recto, ſit rectus, clare demonſtratur. Non ergo ea quæ cum his theorematibus convertuntur, ſine demonſtratione aſſumere licet, ait Geminus. Solent ergo quidem juxta hanc rationem tria tantum eſſe poſtulata. Duo vero reliqua demonſtratione indigent, non minus quam converſa illorum theoremata. Inter Axiomata vero ſuperfluum hoc eſt, Duæ rectæ ſpatium non comprehendunt, quandoquidem*

dem veritas hujus ex demonſtratione pendeat. Et ſane utrumq; tam Apolloniũ quam Euclidem hac in parte peccaſſe manifeſtum. Quod enim Geminus ait Apolloniũ, ex incognitis ac minus certis certa probare voluiſſe, res ipſa declarat. Axioma enim hoc, *Quæ eidem æqualia etiam* inter ſe ſunt æqualia, tali quidem modo probare voluit, ut eſt apud Proclum lib. III. comment. in I. Euclid. Verba Procli integra adſcribam ut & ſententia Apollonii, & quid de ea ſit ſtatuendum una diſcatur. Ὅτι δὲ καὶ ἡ ἀπόδειξις ἣν Ἀπολλώνιος εὑρηκέναι πέπεισαι τοῦ πρώτου τῶν Ἀξιωμάτων οὐδὲν μᾶλλον ἔχει τὸ μέσον τοῦ συμπεράσματος γνωριμότερον, εἰ μὴ καὶ πλέον ἀμφισβητούμενον, μάθοις ἂν ἐπιβλέψας εἰς αὐτὴν καὶ σμικρόν. Ἔστω γὰρ φησὶ τὸ Α τῷ Β ἴσον, τοῦτο δὲ τῷ Γ. λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Γ ἴσον. Ἐπεὶ γὰρ τὸ Α. τῷ Β. ἴσον, τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον, καὶ τὸ ἄρα Α. τῷ Γ. τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον. Ἴσα ἄρα ἐστίν. Ἐν δὲ τούτοις δύο προλαβεῖν ἀναγκαῖον. Ἓν μὲν ὅτι τὰ τὸν αὐτὸν κατέχοντα τόπον ἀλλήλοις ἴσα ἐστὶν, ἕτερον δὲ ὅτι τὰ τῷ αὐτῷ τὸν αὐτὸν κατέχοντα τόπον καὶ ἀλλήλοις τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον. Ταῦτα δὲ ὅτι πολλῷ ἀσαφέστερα τοῦ προθέντος Ἀξιώματος ἐναργές. *Quod autem demonſtrationem primi Axiomatis attinet, quam Apollonius ſe inveniſſe credit, medius in ea terminus non tantum ipſa concluſione magis cognitus non eſt, verum majore etiam difficultate premitur, ut cuivis, qui eam parumper examinare voluerit, facile patebit. Ita*

enim

enim ait. Sit A. quantum, æquale quanto B. Hoc vero ſit æquale quanto G. dico quod A. ipſi G. ſit æquale. Quoniam enim A. & B. invicem ſunt æqualia, ergo æqualem locum occupabunt. A. ergo & G. etiam æqualem locum occupabunt, & per conſequens inter ſe erunt æqualia. In his autem neceſſarium eſt duo ſupponere, unum, quæ æqualia loca occupant inter ſe eſſe æqualia. Alterum, quod quæ eidem eundem locum occupant, & interſe eundem occupent locum. Quod autem hæc multo ſint obſcuriora quam præſens Axioma, cuivis manifeſtum. Ex quibus liquet male Apollonium demonſtrationem Axiomatis in medium adduxiſſe, ideoque Axiomata in Geometricis demonſtrari non poſſe, ſed eſſe ἀναπόδεικτα. Quod autem de Axiomatibus verum eſt, id certa quadam ratione ipſis quoque poſtulatis convenit. Qua enim methodo recta linea Geometrica, vel accuratiſſima quæcunque alia, a puncto ad punctum duci poſſit, in Geometricis demonſtrari nequit. Imo ſi ſubtiliter res gerenda, ne circulus quidem Geometricus deſcribi poteſt, moduſve in Geometria proponi, quo id fiat. Quis enim ulla arte lineam circularem deſcripſerit, omni carentem latitudine. Et ſi quidem id fieri poſſet, quo modo planum illud nanciſceretur, in quo talis circulus eſſet deſcribendus. Unde neque recta terminata ita produci Geometrice poteſt, cum planum, in quo ducenda eſt, non habeatur. Vix enim tales rectas taliave plana acquirere poſſumus, quæ omni ſenſibili vitio careant: quanto minus tale habebi-

bebimus, in quo intellectus nihil deſideret. Ponit ergo Geometra hæc omnia ita in rerum natura dari: modum vero quo dentur, aut dari poſſint, non demonſtrat. Non ergo Poſtulata poſſunt demonſtrari, ſed ea ſupponere cogimur. Ea autem quæ Geometra de lineis circuliſve demonſtrat, principaliter quidem ac proprie vera ſunt de linea & circulo Geometrico: ſenſibiliter autem vera etiam de lineis ſenſibilibus, aliisque planis ac ſuperficiebus ſenſibilibus, deprehenduntur. Quoniam vero Axiomata & Poſtulata non demonſtrantur, neque demonſtrari poſſunt; ſequitur duas haſce Propoſitiones Omnes recti anguli inter ſe ſunt æquales, &, Si in duas rectas recta incidens, duos angulos internos ad eaſdem partes minores fecerit duobus rectis, tunc lineas verſus illas partes concurrere &c. vere nec Axiomata eſſe, nec Poſtulata, cum ambæ accurate demonſtrari, & poſſint, & debeant. Quod enim omnino debeant demonſtrari, inde liquet; quod converſa horum ab ipſo Euclide demonſtrentur: & quod præcipuum eſt, hæc natura ſua adeo clara non ſint, ut ſine demonſtratione pro certis admitti debeant. Converſum enim quinti Poſtulati eſt Propoſitio XVII. libr. I. Cujusvis trianguli duo anguli minores ſunt duobus rectis, quomodocunque ſumpti, ſeu quod idem eſt, ſi in rectas lineas concurrentes recta incidat, angulos internos facit duobus rectis minores. Quoniam ergo hoc demonſtratur de angulis, ergo idipſum de concurrentia laterum etiam demonſtrari debet.

Et ſane, cuivis res æquius examinanti, liquet, hoc Poſtulatum per ſe cognitum non eſſe. Neque illud de angulis rectis tam clarum eſt, ut ſine omni alia cognitione intelligi poſſit. Quomodo autem hæc duo demonſtrentur, ſequenti capite proponemus.

CAP. XX.

Quod ergo illam Propoſitionem attinet *Omnes anguli recti inter ſe ſunt æquales* Proclus quidem hoc modo eam demonſtravit libro. III. comment in I. Euclid: in hunc ipſum locum. Ἔστωσαν δύο ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ καὶ ἡ ὑπο ΔΕΖ, λέγω δὴ ὅτι ἴσαι εἰσίν. Εἰ γὰρ μὴ ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἔστω ἡ πρὸς τὸ Β. Ἐφαρμοζομένης ἄρα τῆς ΔΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ ΕΖ ἐντὸς πεσεῖται. Πιπτέτω ὡς ἡ ΒΗ. καὶ ἐκϐεϐλήσθω ἡ ΒΓ. ἐπὶ το Θ. Ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΒΘ, καὶ ἴσαι ἀλλήλοις. Ἔχομεν γὰρ ἐν τοῖς ὅροις, ὅτι ἡ ὀρθὴ γωνία ἴση τῇ ἐφεξῆς. Ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΘ μειζων τῆς ὑπὸ ΑΒΗ. Πάλιν ἐκϐεϐλήσθω ἡ ΒΗ ἐπὶ τὸ Κ. Ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΒΗ. καὶ ἡ ἐφεξῆς ὀρθὴ, διὰ ταῦτα καὶ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΒΗ. ὥστε ἡ ὑπὸ ΑΒΘ ἐλάσσων τῆς ὑπὸ ΑΒΗ. Ἀλλὰ καὶ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὴ μείζων ὀρθῆς. *Sint* (in ſchemate XI.) *duo recti anguli comprehenſi* ΑΒΓ *&* ΔΕΖ: *dico quod inter ſe ſint æquales. Si enim id verum non eſt, utique alter horum major erit Adaptetur* ΔΕ *ipſi* ΑΒ. *Cadet ergo* ΕΖ *intra* ΒΓ. *Cadat vero ut* ΒΗ, *& producatur* ΒΓ *in* Θ. *Quoniam ergo angulus ſub* ΑΘΒ *eſt rectus, erunt bini an-*

anguli æquales invicem. Etenim in definitionibus habemus, quod rectus angulus ſit æqualis illi qui deinceps eſt angulo. Angulus ergo ABΘ *major eſt angulo* ABH. *Rurſum educatur* BH *in* K. *Quoniam ergo angulus* ABH *eſt rectus, & qui deinceps eſt, etiam rectus, ideoq; æqualis ipſi* ABH: *erit utique angulus* ABΘ *minor angulo* ABH. *Sed & major eſt. quod eſt abſurdum. Non ergo rectus angulus major eſt recto.* Quoniam vero demonſtratio non tam facile ſine ſchemate intelligi poteſt, nos una cum Latina interpretatione ſchema adjecimus. Heic vero paucis demonſtratioñe explicabimus. Argumentatur auctor reducendo adverſarium ad abſurdũ, qui modus argumentandi ſatis freqvens eſt in diſciplinis. Vel enim angulus alteri angulo æqualis erit, vel major, vel minor. Si æqualis eſt, lis eſt compoſita. Si vero adverſarius hoc negaverit, utiq; vel major erit altero angulo, vel minor. Dicat nunc adverſarius ABΓ in dato ſchemate majorem eſſe ΔEZ. Si ergo recta ΔEZ inponatur ipſi ABΓ, ita ut ΔE congruat cum AB. tum EZ non congruet cum BΓ. Si enim congrueret, utique anguli æquales forent per Axioma VIII. adeoque hinc falſitatem ſuæ ſententiæ videret adverſarius. Quod ſi ergo non congruunt: utique, cum AB Γ ſit major quam ΔEZ, ergo EZ cadet intra AB & B Γ. Cadat v. g. in BH. Producatur vero recta B Γ in Θ. Definitio autem recti anguli hæc eſt, ſi recta ſuper rectam conſiſtens angulos utrinque æquales fecerit, tum ambos illos angulos eſſe rectos. Cum ergo AB recta ſu-

ſuper rectam BΓ conſiſtens, ab una parte rectum faciat angulum ABΓ: & ab altera, rectum huic æqualem faciet. Erit ergo ABΘ æqualis ABΓ & per conſequens major quam ABH, hoc eſt quam ΔEZ. Verum ſi recta HB producatur in K: erit etiam, ex hypotheſi adverſarii angulus ABK rectus & æqualis angulo ABH. Angulus enim ABH ex hypotheſi adverſarii eſt angulus ΔEZ hoc eſt rectus. In rectam autem lineam HK, inſiſtens recta AB, cum ab una parte rectum angulum faciat, etiam ab altera parte rectum faciet angulum: adeoque KBA æqualem ABH. Eſt vero KBA angulus major ABΘ angulo. ergo & ABH major erit ABΘ angulo. Antea vero concluſum fuit, ex hac eadem adverſarii hypotheſi, ABH minorem eſſe angulo ABΘ. Idem ergo angulus, eodem angulo, & major eſt, & minor. At falſum conſequens, ergo & antecedens. Adeoque rectus angulus nec major eſt altero quocunque recto angulo, nec minor: ideoque æqualis.

Poteſt autem hoc ipſum alia breviori atque expeditiori methodo demonſtrari. Cum enim ex definitionibus conſtet, obtuſum & acutum angulum à recto differre, eum quidem, quod recto major ſit, hunc vero quod recto ſit minor; itaq; in hoc eodem diagrammate, ſi dicatur ABΓ rectus, major eſſe recto ΔEZ, dematur ergo aliquid angulo ABΓ, ut reſiduum æquale fiat angulo ΔEZ. Quantumcunque vero illud fuerit quod aufertur, ſemper angulus reſiduus minor erit angulo ABΓ. ut v. g. ſi auferatur HBΓ ab angulo,

Digitized by Google

lo ABΓ, reſiduus angulus ABH minor erit angulo ABΓ. Eſt vero ABΓ rectus. Qui autem recto minor eſt, acutus eſt, non vero rectus. Si ergo ΔEZ minor fuerit ABΓ. utique non rectus erit, ſed acutus. Eodem modo ſi ΔEZ dicatur major eſſe ABΓ, ſeu quod idem eſt, ABΘ: addatur aliquid. Quantumcunque vero illud fuerit, quod adjicitur, ſemper majorem angulum faciet recto ABΘ. ſeu ABΓ. Ut ſi ΘBK addatur ABΘ, erit angulus ABK major angulo ABΘ. At angulus ABΘ eſt rectus. Qui autem recto major eſt angulus, non rectus eſt, ſed obtuſus. Ergo angulus ABK non eſt rectus, ſed obtuſus. Et ſi ΔEZ convenit angulo ABK, utique non rectus erit, ſed obtuſus. Rectus ergo angulus, non poteſt eſſe vel major, vel minor, altero recto. Si enim major fuerit, non rectus erit, ſed obtuſus. Sin minor: non rectus eſt, ſed acutus. Adeoque omnes anguli recti inter ſe erunt æquales.

Quod autem demonſtratum eſt de rectis angulis, eos omnes inter ſe eſſe æquales, id de converſo hujus Propoſitionis non valet, nempe omnes angulos æquales, eſſe rectos. In certo quidem caſu verum eſt, nempe ſi recta rectam ita ſecuerit, ut omnes anguli ſint æquales, tum verum eſt hoſce angulos eſſe rectos. Adeoque verum etiam eſt, ſi anguli, vel duo, ad eaſdem partes, vel quatuor, ad omnes partes, ex duarum rectarum linearum inclinatione procreati, æquales fuerint: tum ſemper eſſe rectos. Nec poſſe duas rectas lineas quæ inclinando ſe invicem contin-

S gunt,

Digitized by Google

gunt, æquales angulos, ſingulos, ſingulis, efficere, niſi anguli illi ſint recti. Non tamen omnes propterea anguli æquales, ſunt recti. Quando enim linea lineam ſecat, qui ad verticem ſunt anguli, ſemper invicem ſunt æquales, & tamen, & acuti eſſe poſſunt, & obtuſi, ut ex XV. Propoſitione I. Elem. liquet.

Quod vero Pappus & ex eo Proclus demonſtrare conantur, eſſe quoſdam angulos rectis æquales, nec tamen rectos, id non video quomodo ex appoſita eorum demonſtratione ſequatur. Verba Procli ſunt. Ὁ δὲ Πάππος ἐπέστησεν ἡμᾶς ὀρθῶς, ὅτι τὸ ἀντίστροφον οὐκέτι ἀληθὲς τὸ τὴν ἴσην τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ἐκ παντὸς εἶναι ὀρθήν. Ἀλλ' εἰ μὲν εὐθύγραμμος εἴη πάντως ὀρθὴν εἶναι. δύνασθαι δὲ καὶ περιφερόγραμμον γωνίαν ἴσην ὀρθῇ δειχθῆναι. Καὶ δῆλον ὡς οὐκέτι τὴν τοιαύτην ὀρθὴν εἶναι δύνασθαι προσαγορεύσομεν. Κατὰ γὰρ τὴν τῶν εὐθυγράμμων γωνιῶν τομὴν, τὴν ὀρθὴν ἐλαμβάνομεν, ὑφιστάντες αὐτὴν ὑπὸ εὐθείας ὑφεστώσης ἀκλινῶς πρὸς τὴν ὑποκειμένην, ὥστε ἡ ἴση τῇ ὀρθῇ οὐ πάντως (ἴση τῇ ὀρθῇ) legendum ὀρθή ἐστιν, εἴπερ μηδὲ εὐθύγραμμος. Νενοήσθωσαν ἤδε εὐθεῖαι δύο ἴσαι αἱ AB. BΓ. ποιοῦσαι τὴν πρὸς τῷ B ὀρθήν. Καὶ ἔστωσαν ἴσαι, καὶ ἐπ' αὐτῶν ἡμικύκλια κέντρῳ καὶ διαστήματι γραφέντα τὰ AEB. BZΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴσα τὰ ἡμικύκλια, ἐφαρμόζει ἀλλήλοις, καὶ ἴση ἡ ὑπὸ EBA γωνία τῇ ὑπὸ ZBΓ. Κοινὴ προσκείσθω, καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ABZ. Ὅλη ἄρα ἡ ὀρθὴ ἴση ἐστὶ τῇ μηνοειδεῖ τῇ ὑπὸ EBZ. Καὶ

ὅμως

ὅμως οὐκ ἐστιν ἡ μηνοειδὴς ὀρθή. τῷ δὲ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ἀμβλείας οὔσης ἢ ὀξείας τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. δειχθήσεται αὐτῇ ἴση μηνοειδής. Τοῦτο γάρ ἐστι τὸ εἶδος τῶν περιφερογράμμων γωνιῶν τὸ συμβιβαζόμενον τοῖς εὐθυγράμμοις. Πλὴν τόγε τοσοῦτον ἰστέον, ἐπὶ μὲν τῆς ὀρθῆς καὶ τῆς ἀμβλείας προσθεῖναι δεῖ τὴν μεταξὺ γωνίαν τῆς ΑΒ εὐθείας καὶ ΒΖ περιφερείας. Ἐπὶ δὲ τῆς ὀξείας ἀφελεῖν. Ἡ γὰρ ΑΒ. εὐθεῖα τέμνει τὴν ΒΖ περιφέρειαν. *Pappus vero recte docuit quod converſum hujus verum non ſit. Nempe angulum recto æqualem, etiam ſemper eſſe rectum. Sed ſi quidem rectilineus fuerit, omnino rectū eſſe. Poſſe autem & angulum peripheriis circuli comprehenſum demonſtrari æqualem angulo recto. Et tamen clarum eſt, hunc rectum dici non poſſe. In diviſione quidem rectilineorum angulorum, rectum eum eſſe diximus qui fit quando recta linea alteri rectæ ſupponitur, quæ quidem priori rectæ ſine omni inclinatione inſiſtit. Adeoq; qui recto eſt æqualis, non ſemper rectus eſt, niſi etiam fuerit rectilineus. Concipiantur vero duæ rectæ lineæ* AB, BΓ. *comprehendentes rectum angulum ad* B. *ſint lineæ hæ æquales. Super ipſis autem, centris & intervallis convenientibus, deſcribantur duo ſemicirculi* AEB & BZΓ. *Quoniam igitur ſemicirculi conveniunt invicem, ergo & angulus* EBA *æqualis erit angulo* ZBΓ. *Apponatur communis & reſiduus*, ABZ. *Totus ergo rectus angulus æqualis angulo Lunæformi, qui comprehenditur ſub* EBZ. *Et tamen angulus hic Lu-*

næformis non eſt rectus. Eodem modo ſi angulus ΑΒΓ *ponatur vel obtuſus, vel acutus, demonſtratur angulus Lunæformis huic eſſe æqualis. Hæc enim ſpecies angulorum peripheriis comprehenſorum, confertur cum rectilineis. Id vero præterea ſciendum eſt, quod cum angulus* ΑΒΓ*, rectus fuerit, aut obtuſus: tum angulum comprehenſum recta* ΑΒ *& Peripheria* ΒΖ *debere apponi: quando vero acutus fuerit, aufertur angulus prædictus. Recta enim* ΑΒ *ſecat tum Peripheriam* ΒΖ. Verum in hoc quidem argumento plus videtur eſſe in concluſione, quam fuit in præmiſſis. Sit enim diagramma juxta rationem Pappi vel Procli exſtructum n. XII. Atque in eo ſit angulus ΒΖΓ. rectus, latera autem ΑΒ & ΒΓ æqualia: ſuper his autem exſtructi ſemicirculi ΑΕΒ ΒΖΓ, manifeſtum quidem eſt: angulos ΑΒΕ & ΓΕΖ eſſe æquales. Quod vero angulus ΑΒΖ reliqvus, junctus communi ΕΒΖ, ſit æqualis recto ΑΒΓ; vel ſolus, ΖΒΕ Lunæformis, æqualis ſit recto ΑΒG: id vero minime liquet. Contrarium potius hinc ſequitur. Angulus enim ΑΒΓ excedit angulum Lunæformem binis angulis miſtis ΑΒΖ nempe, & ΓΒΕ; ideoque ſi angulus ΑΒΓ debet æquari angulo ΖΒΕ, debent prius hi duo anguli auferri. Angulus ergo Lunæformis ſeu ex duobus circuli peripheriis compoſitus, eſt minor angulo recto, & non æqualis. Quod autem diagramma hoc modo ordinari debeat, ex ſequentibus liquet. Ait enim ſi angulus ΑΒΓ ponatur acutus, tum rectam ΑΒ ſecare peripheriam: in obtuſo autem, vel recto, non i-

tem

Digitized by Google

tem, ideoque angulum comprehenſum AB recta & BZ peripheria heic addi debere, illic vero auferri. Quod quidem in hoc diagrammate contingere videmus. In acuto enim angulo LBK, recta KB ſecat peripheriam BMI. In angulo autem recto ΑΕΓ, aut obtuſo HBN, id non contingit. Sed tamen veritas rei nihilo propter hoc clarior. Suſpicabar mendum heic latere, vel aliquid deeſſe. Verum quocunque modo locus vel emendetur, vel reſtituatur, vix quicquam proficere poſſumus, cum ipſa aſſertio perquã ſit dubia. Id enim certum eſt, angulum peripheriarum, a rectilineo comprehenſum, multo minorem eſſe ipſo rectilineo. Quicquid ſit, de eo nunc multis inquirere animus nobis non eſt, cum certum ſit, Definitionem Geometricam eſſe certiſſimam, quæ omnes angulos rectilineos, non rectos, vel minores facit rectis, vel majores.

CAP. XXI.

Alterum poſtulatum majori videtur indigere demonſtratione, ideoque à Ptolemæo ſicut aliud quoddam Theorema diducte fuit demonſtratum. Liquet hoc ex Proclo qui Ptolemæi Propoſitionem modumque demonſtrandi totidem verbis recenſet, quæ eo libentius heic adponam, quod ipſius Ptolemæi ſcriptum hac de re nuſquam reperiatur. Ita vero Proclus libro IV. in I. Elem. Euclidis in Propoſit. XXIX. Ἤδη μὲν οὖν καὶ ἄλλοι τινὲς ὡς θεώρημα παρὰ τῷ στοιχειωτῇ ληφ-

θεν ἀποδείξεται ἠξίωσαν. Δοκεῖ δὲ καὶ ὁ Πτολεμαῖος αὐτὸ δεικνύναι ἐν τῷ περὶ τοῦ τὰς ἀπ' ἐλαττόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας συμπίπτειν. καὶ δείκνυσι πολλὰ προλαβὼν τῶν μέχρι τοῦδε τοῦ θεωρήματος ὑπὸ τοῦ στοιχειωτοῦ προαποδεδειγμένων. Καὶ ὑποκείσθω πάντα εἶναι ἀληθῆ ἵνα μὴ καὶ ὑμεῖς ὄχλον ἐπεισάγωμεν ἄλλον, καὶ ὡς λημμάτιον τοῦτο δείκνυσθαι διὰ τῶν προειρημένων. Ἓν δὲ καὶ τοῦτο τῶν προδεδειγμένων, τὸ τὰς ἀπὸ δυοῖν ὀρθαῖς ἴσων ἐκβαλλομένας μηδαμῶς συμπίπτειν. λέγω τοίνυν ὅτι καὶ τὸ ἀνάπαλιν ἀληθές, καὶ τό, παραλλήλων οὐσῶν τῶν εὐθειῶν καὶ τεμνομένων ὑπὸ μιᾶς εὐθείας τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθοῖς ἴσα εἶναι. Ἀνάγκη γὰρ τὴν τέμνουσαν τὰς παραλλήλους ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, ἢ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους. Ἔστωσαν οὖν παράλληλοι, αἱ αβ. γδ. καὶ ἐμπιπτέτω εἰς αὐτὰς ἡ εζ. λέγω ὅτι οὐ ποιεῖ δύο ὀρθῶν μείζους τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτά. Εἰ γὰρ αἱ ὑπὸ αζη. γηζ. δύο ὀρθῶν μείζους, αἱ λοιπαὶ αἱ ὑπὸ βζη δηζ δυὸ ὀρθῶν ἐλάσσους. Ἀλλὰ καὶ δυὸ ὀρθῶν μείζους αἱ αὐταί. Οὐδὲν γὰρ μᾶλλον αἱ αζ, γη παράλληλοι, ἢ αἱ ηδ. ζβ. ὥστε εἰ ἡ ἐμπεσοῦσα εἰς τὰς αζ γη δυὸ ὀρθῶν μείζους ποιεῖ τὰς ἐντὸς, καὶ ἡ εἰς τὰς ζβ. ηδ ἐμπίπτουσα δυὸ ὀρθῶν ποιήσει μείζους τὰς ἐντός. Ἀλλ' αἱ αὐταὶ καὶ δυὸ ὀρθῶν ἐλάσσους. Αἱ γὰρ τέσσαρες αἱ ὑπὸ αζη. γηζ. βζη. δηζ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι εἰς τὰς παραλλή-

λους

Digitized by Google

λους ἐμπίπτουσα οὐ ποιεῖ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας. Εἰ δὲ μήτε μείζους, μήτε ἐλάσσους ποιεῖ τῶν δύο ὀρθῶν, λείπεται, τὴν ἐμπίπτουσαν δύο ὀρθαῖς, ἴσας ποιεῖν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας. Τούτου δὴ προδεδειγμένου τὸ προκείμενον ἀναμφισβήτως ἀποδείκνυται. Λέγω γὰρ ὅτι ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιεῖ, συμπεσοῦνται αἱ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. Μὴ γὰρ συμπιπτέτωσαν, ἀλλ᾽ εἰ ἀσύμπτωτοι εἰσὶν ἐφ᾽ ἃ μέρη αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, πόλλῳ μᾶλλον ἔσονται ἀσύμπτωτοι ἐπὶ θάτερα, ἐφ᾽ ἃ τῶν δύο εἰσὶν ὀρθῶν αἱ μείζονες, ὥστε ἐφ᾽ ἑκάτερα ἂν εἶεν ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι, εἰς τοῦτο παράλληλοι εἰσίν. Ἀλλὰ δέδεικται ὅτι ἡ εἰς τὰς παραλλήλους ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθαῖς ἴσας ποίησει γωνίας. Αἱ αὐταὶ ἄρα καὶ δύο ὀρθαῖς ἴσαι, καὶ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἀδύνατον. Quæ ita verto & ut rectius intelligatur diagramma XII. conſiderari jubeo. *Jam vero & illud quod Euclides aſſumpſit, alii quidam ut theorema demonſtrare ſunt conati; atque inter hos Ptolemæus in libro, quo probavit rectas, a minoribus angulis, quam duo recti, productas concurrere. Hoc vero demonſtrat, multis antea ſuppoſitis, quæ Euclides demonſtravit, quorum fidem neque nos elevare volumus, ne turbas excitemus, ſed permittemus hoc ut Lemma aliquod ex præcedentibus probari. Unum vero in-*

inter hæc demonſtrata, eſt, Rectas, quæ à binis angulis, æqualibus totidem rectis, educuntur nuſquam concurrere. Cujus converſum & verum eſſe dico, nempe ſi recta ſecuerit duas parallelas tum internos angulos, ad easdem partes, duobus rectis eſſe æquales. Neceſſarium enim eſt eam quæ parallelas ſecat, angulos internos & ad easdem partes; vel minores facere duobus rectis, (vel majores) vel æquales. Sint parallelæ lineæ αβ γδ. *incidat vero in has* εζ. *dico quod non faciat internos angulos majores duobus rectis. Si enim* αζη γηζ *duobus rectis ſunt majores, reliqui anguli nempe* βεη & δηζ *duobus rectis erunt minores. Sed iidem & duobus rectis ſunt majores. Non enim* αζ γη *magis ſunt parallelæ quam* ηδ εβ. *ut propterea ſi illa quæ in* αζ γη *incidit rectas, binos internos & ad eadem partes angulos faciat duobus rectis majores: etiam illa quæ in* εβ ηδ *incidit, internos & ad easdem partes angulos, duobus rectis majores faciet. Sunt vero iidem anguli & duobus rectis minores. Quatuor enim anguli* αζη γηζ βζη δηζ *quatuor rectis æquales. Eſt vero hoc abſurdum. Eodē modo demonſtrabimus quod quæ in duas rectas incidat, internos & ad easdem partes angulos non faciat, duobus rectis minores. Si vero neque majores ſunt, neque minores duobus rectis, ſequitur utique eam quæ duabus rectis incidit internos & ad easdem partes angulos efficere duobus rectis æquales. Hoc vero demonſtrato ſine omni controverſia verũ id eſſe deprehenditur, quod nunc præ manibus habemus. Dico enim ſi in duas rectas recta*

inci-

incidens internos & ad easdem partes angulos minores fecerit duobus rectis, concurrent rectæ illæ eductæ verſus eas partes ubi ſunt duo anguli duobus rectis minores. Si enim verſus eas partes non concurrunt, ubi ſunt anguli duobus rectis minores, multo minus concurrent verſus alteram partem, ubi ſunt bini anguli binis rectis majores, ita ut verſus neutram partem concurrant, ideoque ſint parallelæ. Sed demonſtratum eſt, eam quæ in parallelas incidit, internos & ad easdem partes angulos, æquales facere duobus rectis. Iidem ergo anguli & binis rectis æquales ſunt, & duobus rectis minores: quod eſt impoſſibile. Hactenus quidem Ptolemæus demonſtravit, ſi in rectas lineas recta incidens angulos fecerit duobus rectis minores, tum rectas illas concurrere. Id vero fieri verſus illas partes, ubi ſunt anguli duobus rectis minores, poſtea hoc modo probat. Ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ γδ. καὶ ἐμπίπτουσα εἰς αὐτὰς ἡ εζηθ ποιείτω τὰς ὑπὸ αζη καὶ ὑπὸ γηζ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους. Ὅτι μὲν οὖν οὐκ ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι δέδεικται. Εἰ δὲ συμπίπτουσιν ἤ, ἐπὶ τὰ αγ συμπεσοῦνται, ἢ ἐπὶ τὰ βδ. Συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ βδ κατὰ τὸ κ. Ἐπεὶ οὖν αἱ μὲν ὑπὸ αζη καὶ γηζ δύο ὀρθῶν εἰσιν ἐλάσσους, αἱ δὲ ὑπὸ αζη βζη δύο ὀρθαῖς ἴσαι, κοινῆς ἀφαρεθείσης τῆς ὑπὸ αζη, ἡ ὑπὸ γηζ ἐλάσσων ἔσται τῆς ὑπὸ βζη. Τριγώνου ἄρα τοῦ ηζκ ἡ ἐκτὸς τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἐλάσσων, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κατὰ ταῦτα συμπίπτουσιν. Ἀλλὰ μὲν συμπίπτουσιν. Κατὰ θάτερα ἄρα ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται, καθ᾽ ἃ τῶν δύο ὀρθῶν εἰσιν ἐλάσσονες.

Sint enim in digrãmate XIII. duæ rectæ αβ.γδ in quas incidat recta εζηθ. faciens angulos αζη & γηζ minores duobus rectis. Reliqui ergo anguli majores erũt duobus rectis. Demonſtratum vero antea fuit lineas haſce neceſſario concurrere. Quoniam ergo concurrunt, fiet utique illud veliverſus αγ, vel verſus βδ. Concurrant verſus βδ. circa κ. Quoniam ergo αζη. & γηζ duobus rectis ſunt minores, anguli autem αζη βζη æquales duobus rectis, aempto communi, erit γηζ minor quam ηβκ. In triangulo ergo ηζκ angulus externus interno & oppoſito minor erit: quod eſt abſurdum. Non ergo verſus haſce partes concurrent. At concurrunt tamen. Fit ergo illud verſus alias partes, ubi anguli ſunt duobus rectis minores. Et tali quidem modo Ptolemæus hæc demonſtrare fuit conatus. Nec tamen ejus demonſtratio Proclo placuit. Id enim aſſumere videtur quod adverſarius non tam facile ſine demonſtratione concedet. Quod enim in prima demonſtratione ait *Si αζη γηζ duobus rectis ſunt majores, ergo βζη δηζ duobus rectis erunt minores* id facile concedet adverſarius. Neque tamen ideo hanc conſequentiam admittet, quod βζη δηζ ſint etiam majores duobus rectis. Id enim per ſe evidens non eſt. Adeoque neque abſurdum illud ex hypotheſi adverſarii colligitur, quod inde deducere vult Ptolemæus, ſuaque hoc modo demonſtrare. Aliam etgo viam Proclus eſt ingreſſus. Et primo quidem Axiomatis loco ſupponit. *Si duæ rectæ angulum ab una parte facientes, ab altera parte in infinitum producantur, tum quas-*

quaſcunque magnitudines finitas comprehendere poſſe. Inde demonſtrat *quæ unam parallelarum ſecat recta linea, etiam alteram parallelarum ſecare.* Demum Poſtulatum hoc Euclideum aggreditur. Sed ipſum Proclum loquentem audiamus. Πρὸς δὲ τὸν τοῦτο ἐπιζητοῦντα κατασκευαζόμενον ἰδεῖν, λεγέσθω παρ' ἡμῶν ὅτι δεῖ προλαβεῖν ἀξίωμα τοιοῦτον ᾧ καὶ Ἀριστοτέλης ἐχρήσατο, κατασκευάζων πεπερασμένον εἶναι τὸν κόσμον. Ἐὰν ἀφ' ἑνὸς σημείου δύο ἐκβάλλονται εὐθεῖαι γωνίαν ποιοῦσαι ἐπ' ἄπειρον, πᾶν πεπερασμένον μέγεθος ὑπερβάλλει ἡ διάστασις αὐτῶν τῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλομένων. Ἔδειξε γοῦν ἐκεῖνος ὅτι ἀπειρῶν οὐσῶν τῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἐκβεβλημένων, ἄπειρον τὸ μεταξύ. Πεπερασμένου γὰρ ὄντος, αὐξῆσαι τὴν διάστασιν ἀδύνατον. ὥστε οὐκ ἄπειροι αἱ εὐθεῖαι. Παντὸς οὖν τοῦ ληφθέντος πεπερασμένου μεγέθους μεῖζον ἀλλήλων διαστήσονται ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον αἱ εὐθεῖαι. Τούτου δὴ προϋποθέντος, λέγω, ὅτι ἐὰν παραλλήλων εὐθειῶν τὴν ἑτέραν τις εὐθεῖαν τέμνῃ, τεμεῖ καὶ τὴν λοιπήν. Ἔστωσαν γὰρ παράλληλοι αἱ αβ γδ, καὶ τεμνέτω τὴν αβ ἡ εζκ· λέγω ὅτι τὴν γδ τεμεῖ. Ἐπεὶ γὰρ δύο εὐθεῖαί εἰσιν ἀφ' ἑνὸς σημείου τοῦ ζ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι αἱ βζ ζη. παντὸς μεγέθους μείζονα ἔχουσι διάστασιν. ὥστε καὶ τούτου ὅσον ἐστὶ τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων. ὅτ' ἂν οὖν μεῖζον ἀλλήλων διεστῶσιν, τῆς τούτων διαστάσεως, τεμεῖ ἡ ζη τὴν γδ. Ἐὰν ἄρα παραλλήλων τὴν ἑτέραν τέμνῃ τις εὐθεῖα,

τεμεῖ καὶ τὴν λοιπήν. Τούτου προαποδειχθέντος ἀκολούθως δείξομεν τὸ προκείμενον. Ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ γδ καὶ ἐμπιπτέτω εἰς αὐτὰς ἡ αζ. ἐλάσσονας δυὸ ὀρθῶν ποιοῦσα τὰς ὑπὸ βεζ δεζ. λέγω ὅτι συμπεσοῦνται αἱ εὐθεῖαι κατὰ ταῦτα τὰ μέρη, ἐφ᾽ ἃ αἱ τῶν δύο εὐθειῶν εἰσὶν ἐλάσσους. Ἐπειδὴ γὰρ αἱ ὑπὸ θεζ δζε ἐλάσσους εἰσὶν δύο ὀρθῶν τῇ ὑπεροχῇ τῶν δύο ὀρθῶν, ἔστω ἴση ἡ ὑπὸ θεβ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ θε ἐπὶ τὸ κ. Ἐπεὶ οὖν εἰς τὰς κβ γζ ἐμπέπτωκεν ἡ εζ, καὶ ποιεῖ τὰς ἐντὸς δύο ὀρθαῖς ἴσας τὰς ὑπὸ θεκ, δζε, παράλληλοι εἰσὶν αἱ θκ γδ εὐθεῖαι· καὶ τέμνει τὴν κθ ἡ αβ. τεμεῖ ἄρα καὶ τὴν γδ διὰ τὸ προδεδειγμένον. Συμπεσοῦνται ἄρα αἱ αβ γδ κατὰ μέρη ἐκεῖνα, ἐφ᾽ ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὥστε δέδεικται τὸ προκείμενον. *Illi vero qui hæc accuratius ſcire diſcupit, hæc dicimus, quod neceſſarium ſit illud Axioma ſupponere, quo Ariſtoteles etiam uſus eſt, cum demonſtrare vellet mundum eſſe finitum. Si ab uno ſigno duæ rectæ lineæ in infinitum educantur, quæ angulum faciunt, earum diſtantia, cum in infinitum producuntur, quamcunque finitam magnitudinem excedet. Et demonſtratum quidem eſt Ariſtoteli, ſi infinitæ fuerint rectæ quæ à circulo ad peripheriam ducuntur, tum etiam intervallum rectarum infinitum eſſe. Finiti enim intervallum augere, eſt impoſſibile. Ideoque niſi intervallum infinitum fuerit, neque lineæ infinitæ erunt. Quantacunque ergo ſumatur magnitudo, dummodo finita, intervallum rectarum in infinitum productarum illam*

illam neceſſario excedit. Hoc autem ſuppoſito, dico ſi recta linea unam rectarum parallelarum ſecuerit etiam alteram ſecabit. Sint enim parallelæ αβ γδ. *in figura XII. & ſecet qvidem* εζη *recta rectam* αβ. *dico qvod eadem* εζη *rectam* γδ *ſecabit. Cum enim duæ rectæ ab eodem puncto* ζ *producantur in infinitum, rectæ nempe* ϐζ *&* ζη *ergo intervallum earum qvacunq; magnitudine aut diſtantia majus erit. Ideoque & diſtantiam parallelarum linearum* αβ *&* γδ *exedet Ubi autem intervallum rectarum majus fuerit intervallo parallelarum, ſecabit* ζη *rectam* γδ. *Si igitur unam parallelarum recta ſecuerit, etiam alteram ſecabit. Hoc autem antea demonſtrato, conſequenter idipſum demonſtrabimus, quod præ manibus nunc habemus. Sint duæ rectæ* αϐ γδ *figura XIV. in qvas incidat* εζ *faciens angulos* βεζ δζε *duobus rectis minores, dico, qvod rectæ coincidant verſus eas partes, ubi ſunt anguli duobus rectis minores. Qvoniam enim* ϐεζ δζε *minores ſunt duobus rectis, exceſſu illo qvo duo recti hoſce excedunt, conſtituatur angulus* θεβ *huic exceſſui æqvalis, ejiciaturq;* θε *in* κ. *Qvoniam ergo recta* εζ *in rectas* κθ γδ *incidens internos angulos duobus rectis æqvales facit, nempe angulos* θεζ *&* δζε, *erunt* θκ *&* γδ *parallelæ. Secat autem recta* αβ *rectam* κθ *ergo & rectam* γδ *ſecabit, per illud qvod nunc demonſtravimus. Concurrent igitur* αβ γδ *verſus illas partes, ubi ſunt anguli duobus rectis minores; qvod demonſtrare oportebat.*

Atqve in hac qvidem demonſtratione præter Axioma qvod heic adducitur, etiam propoſitionem XXVII lib. I. ſupponit. Cœtera in demonſtratione clara ſunt, nec ullam habent difficultatem. Satis qvidem compertum habeo, ſolere Euclidem, ex antecedentibus, ea qvæ immediate ſeqvuntur demonſtrare, atque hoc modo, Propoſitionem qvæ tradit duos angulos trianguli internos & oppoſitos externo eſſe æqvales, ex antecedente Propoſitione demonſtrari, qvæ qvidem ex eo qvod nunc explicuimus Theoremate dependet. Id qvoqve cognitum mihi eſt, poſſe illam ipſam Propoſitionem longe breviori via expediri, nempe ſi in Propoſitione XVI. demonſtratum fuerit lineas qvæ angulos externos faciunt in directum ſibi jacere: ſicut illud qvoqve alibi à nobis factum eſt. Sed qvandoqvidem Euclidis Propoſitiones eo, qvem ex Proclo laudavimus, modo, ſatis bene nunc demonſtrentur, nolumus Lectorem diutius his detinere. Qvoniam vero omnia Geometriæ principia, quæ ab Euclide I. libro Elementorum ponuntur, vera eſſe ſunt deprehenſa: nunc qvid in ipſis concluſionibus à qvibusdam deſideratum fuit, paucis attingemus.

CAP. XXII.

Diximus antea ubi contra Sextum Empiricum diſputavimus, argumentum qvod contra X. Propoſitionem libri I. Element. proponit, falſa niti hypotheſi, nempe lineas ex punctis componi. Cum ergo huic

Digitized by Google

huic objechoni alibi ſatisfactum ſit, eo lectorem remittimus. Præter Pyrrhonios autem ſeu Scepticos, alios quoq; adverſarios habuere Geometræ nempe Epicureos, qvi quidem non falſitatis principia Geometrica arguebant, ſed potius ut nimis accurate etiam res manifeſtas demonſtrantia irridebant. Nota eſt Epicureorum vox de Propoſitione XX. lib. I. Elementor. eam nempe Propoſitionem adeo per ſe claram & perſpicuam, ut ejus veritas etiam aſino conſtet. Proclus ad hanc Propoſitionem. Τοῦτο τὸ θεώρημα διασύρειν μὲν εἰώθασιν, οἱ Ἐπικούρειοι καὶ ὄνῳ λέγοντες αὐτὸ δῆλον εἶναι καὶ μηδεμιᾶς δεῖσθαι κατασκευῆς. Ὁμοίως δὲ ἀνεπιστήμονος εἶναι ἔργον τὰ ἐμφανῆ παραμυθίας ἀξιοῦν, καὶ τοῖς ἀδήλοις, αὐτόθεν πιστεύειν. Ὁ γὰρ ταῦτα συγχέων φανερός ἐστι τό τε ἀναπόδεικτον ἀγνοῶν. Ὅτι δὲ καὶ ὄνῳ τὸ προκείμενον θεώρημα γνώριμον κατασκευάζουσιν ἐκ τοῦ τεθέντος χόρτου κατὰ τὸ ἕτερον πέρας τῶν πλευρῶν, τὸν ὄνον τὴν μίαν ὁδεύειν πλευρὰν, ἀλλὰ μὴ τὰς δύο, τροφῆς ὀρεγόμενον. *Conſueverunt qvidem Epicurei hoc Theorema traducere, dicentes aſino illud eſſe cognitum, neq; ulla indigere demonſtratione. Eum vero qvi manifeſta demonſtrare conatur, non minus inſcite agere, qvam qvi ignotis ſine demonſtratione fidem habet. Qvi enim hæc confundit, manifeſte deprehenditur ignorare, qvid illud ſit, qvod indemonſtratum ſupponere tantum decet. Qvod*

vero

vero præſens negocium etiam aſino cognitum ſit, inde probant, qvod poſito gramine circa unum terminum lateris alicujus, aſinus illud tantum latus emetiatur, neqve circumitione gaudeat, duove latera conficiat. Huic vero dubio ita reſpondit Proclus: Πρὸς δὴ ταῦτα λεκτέον ὅτι σαφὲς μὲν κατὰ τὴν αἴσθησιν ἐστὶ τὸ θεώρημα, οὔπω δὲ σαφὲς κατὰ τὸν ἐπιστημονικὸν λόγον. Πολλά γὰρ τοῦτο πέπονθεν τῶν πραγμάτων, οἷον θερμαίνει τὸ πῦρ καὶ τοῦτο τῇ αἰσθήσει σαφές. Αλλὰ πῶς θερμαίνει, τῆς ἐπιστήμης ἔργον ἐλεῖν, πότερον, ἀσωμάτῳ δυνάμει ἢ σωματικαῖς τομαῖς, σφαιρικοῖς μορίοις ἢ πυραμοειδέσι. Πάλιν ὅτι κινούμεθα τῇ αἰσθήσει δῆλον, πῶς δὲ κινούμεθα παραστῆσαι τῷ λόγῳ χαλεπὸν, κατὰ ἀμερὲς ἢ κατὰ διάστημα, πῶς δὲ ἄπειρα δίιμεν, εἰς ἄπειρον γὰρ διαιρετὸν πᾶν μέγεθος. Ἔστω τοίνυν καὶ τοῦ τριγώνου τὸ μείζους εἶναι τὰς δύο, τῆς μιᾶς, τῇ αἰσθήσει καταφανὲς, ἀλλὰ πῶς τοῦτο γίνεται τῆς ἐπιστήμης ἔργον εἰπεῖν. *Ad hæc vero dicendum eſt qvod Theorema hoc ſenſibus qvidem manifeſte verum deprehendatur, non vero juxta rationem ſcientificam. Atq; id qvidem multis in rebus contingit Ignem enim calefacere, ſenſibus qvidem manifeſtum eſt. qvomodo autem calefaciat, id ſcientia diſcernere debet, utrum virtute incorporali, aut corporalibus ſectionibus, iisq; vel Sphæricis vel Pyramidalibus. Rurſum, qvod moveamur manifeſtum eſt, qvomodo vero moveamur etiam rationi exhibere eſt per qvam difficile, utrum ſecundum*

cundum indiviſibile, aut ſecundum intervalla. qvo item modo infinita tranſeamus. omnis enim magnitudo in infinitum dividitur. Qvamvis ergo ſenſibus ſit manifeſtum, duo trianguli latera majora eſſe tertio; tamen qvomodo id fiat, ſola ſcientia dicere poteſt. Et ſane non ſine cauſa heic qværi poſſet, qvî fiat? qvod in triangulis rectilineis duo latera ſemper ſint majora reliqvo, cum in aliis triangulis id verum abſolute non ſit. Poteſt enim dari triangulum miſtum, conſtans nempe binis lateribus rectilineis & una portione peripheriæ circuli, in qvo, unum hoc latus majus erit duobus reliqvis Si enim latera rectilinea fuerint circuli radii, angulus autem his comprehenſus major. 115. gradibus: dico arcum circuli 115. gr. hoc eſt, tertium latus hujus trianguli, omnesq; adeo arcus hoc majores, uſq; ad ſemicirculum, qvamdiu angulus ullus concipi poteſt, majores eſſe binis radiis: adeoq;, in omnibus hiſce caſibus, duo latera trianguli minora tertio. Bini enim radii æqvantur integræ diametro. Diameter autem circuli ſe habet ad peripheriam ut 22. ad 7. juxta rationem Archimedeam, adeoq; Hemiperipheria ad diametrum, ut 11. ad 7. Septem ergo undecimæ partes ſemicircumferentiæ æqvantur ipſi diametro, adeoq; binis radiis. At ſi circumferentia dimidia in 11. partes ſecetur, cuivis parti convenient grad. 16. 21′. 49′. $\frac{1}{1}$. adeoq; ſeptem undecimæ ſunt 114. 32′. 43′. $\frac{1}{7}$. æqvales integræ diametro, & per conſequens binis radiis, qvi ſunt latera tranguli mixti. Duo ergo latera

in illo qvidem triangulo, ſunt æqualia tertio: ubi vero ulterius ventum fuerit ad 115. gradus & ultra, duo latera ſunt minora tertio. Quod ſi Archimedea ratio non placuerit, qvæ tamen ſatis clare demonſtrat, id qvod nos ſupponimus: poteſt ex ſubtiliſſima & omnium accuratiſſima ratione Ludolphi van Ceulen computus deduci, & veritas hujus problematis non minus conſtabit. Propter has ergo cauſas neceſſarium erat demonſtrare Propoſitionem XX. lib. I. Elementorum, ut conſtaret, id qvod in miſtis triangulis verum abſolute non eſt, in rectilineis verum eſſe. Et ſane multa ſunt quæ ſenſibus aliter apparent, quam intellectus & ratio ea revera eſſe demonſtrat. Epicurei ſolem bipedalem pronunciabant, quod talis appareret. Non ignoro inſignem Philoſopum fuiſſe Epicurum & naturalis ſcientiæ perqvā peritum, ideoq; necGeometriæ rudem fuiſſe arbitror, qvamvis illud de ipſo affirmare videatur, vel ſaltem indicareSextusEmpiricus.Inter aſſeclas tamen hujus, vel illos ſaltem, qvi nomine tenus Philoſophi Epicurei erant, multi rudes atq; indocti reperiebantur, quorum& hanc fuiſſe objectionem arbitror, ut & quædā cœterorū abſurdorū, qvæ Epicureis tribuuntur. Nam longe rectius in qvibusdā ſapuiſſe Epicurum lemmata ipſius quæ apud veteres habemus quæq; magna diligentia, inſignis ille Philoſophus & Mathematicus Petrus Gaſſendus collegit, abunde commonſtrant. Sed ut ad argumentum revertar, dico multa ſenſibus aliter apparere quā reve-

Digitized by Google

reverà ſunt, ut Sol bipedalis, ſtellæ vix unciales, quæ tamen ratio demonſtrat longe majora eſſe. Principia ergo ſapientiæ non ea ſunt quæ ſolis ſenſibus vera deprehenduntur, ſed quæ ratio vera eſſe judicat atq; ab errore libera. Ita ergo demonſtratum eſt non debere Geometras male audire quod res ſenſibus claras rationibus firment, cum non ea omnia vera ſint, quæ ſenſibus vera apparent, ſed quæ intellectu & ratione vera eſſe deprehenduntur. Et tantum quidem contra Epicureos. Reſtat quidem alia adhuc objectio, quorundam veterum qvi negabant, duas rectas non concurrere in infinitum eductas. Argumentum eſt apud Proclum lib. IV. ad propoſ. XXIX. nec demonſtratio abſimilis ei quæ eſt ad figuram no. 111. noſtram. Verum illa id tantum concludit duas lineas non concurrere in linea, ſed in puncto: quod & verum eſt. Nam ſimpliciter dicere quod non concurrant, id & ſenſibus, & aliis demonſtrationibus eſt contrarium, præcipue illi quam ex Proclo ultimo loco attulimus. Atq; ita omnia illa, quæ alicujus momenti vel ab aliis primo Euclidis libro Element. oppoſita fuere, vel jure opponi poſſunt, ea qva fieri potuit brevitate expoſuimus; unaq; demonſtravimus, principia Geometriæ in omnibus clara certa ac perſpicua eſſe. Præcipue vero Geometricas veritates à falſitatibus Sexti Empirici vindicavimus, rati gratam hac in parte nos operam præſtituros iis, qvi gravioribus occupati, calumnias iſtius viri reijcere & falſitatis convince-

V 2 re

Digitized by Google

re neqveunt. Ipſum quoq; Euclidem vera per omnia tradidiſſe demonſtravimus, quamvis alicubi non ſatis commode egerit, atq; ea pro demonſtratis ſuppoſuerit, quæ vera quidem ſunt, ſine demonſtratione tamen vera eſſe non intelliguntur: quæ ideo nos ex antiqvorum mente demonſtravimus, eorumq; παρωρά-ματα indicavimus, non ut opprobrio afficiantur, ſed ut alii ſimiles ſcopulos caveant. Qvoniam vero nihil præterea in prioribus libris Euclidis compertum habeam, quod falſitatis, à qvoquam ſit accuſatum, aut jure accuſari poſſit, ad quintum librum Elementorum pedem promovebo, in quo aliquot propoſitiones duas imprimis VIII. & X impugnandas ſuſcepit Meibomius, idq; non quod minus accuratè eſſent demonſtratæ, ſed quod falſa niterentur difinitione, ea nempe quæ eſt libr. V. ſeptima. Hujus ergo viri argumenta primum examinabimus, totamq; illam rationem breviſſima via percurremus. Inde ad aliud caput accuſationis Meibomianæ perveniemus, in quo alios Geometras ac nominatim Theonem Alexandrinum & Eutocium Aſcolonitam, & recentiores ignorantiæ accuſat, quodq; veteres Geometras non intellexerint. Equidem non me fugit, multa à Petro Ramo viro doctiſſimo atq; inſigni Geometra contra methodum Euclideam fuiſſe propoſita: quæ tamen ideo tacitus prætereo, quod illud vitium, non ipſas veritates concernat, nec tam Geometricum ſit, qvam Logicum

gicum. Fuere alii qvi dė natura demonſtrationum Mathematicarum, varia diſputarunt; quibus egregiè ſatisfecit Franciſcus Barocius patritius Venetus in celeberrima Patavienſi Academia Mathematum Profeſſor Publcus, qvi in illa Oratione,qvam publice habuit, tum cum primum Mathemata profiteri inciperet, variis argumentis tam ex auctoritate, qvam ex ſolida ratione petitis, pererudite ac ſolide comprobavit demonſtrationes Mathematicas non modo vere & proprie demonſtrationes appellari, ſecus qvam aliqvi ſentirent, ſed & omnium primas eſſe ac certiſſimas. Qvi ergo hæc plenius cognita habere cupit illum adeat. Neq; enim his diutius immorari libet, cum ipſa prima principia totaq; Geometrica materia à cavillis malevolorum ſatis ſit vindicata. His igitur in Dei nomine primum librum finiamus, ac ſeqventis initium faciamus.

WILHELMI LANGI
DE
VERITATIBUS GEOMETRICIS.
LIBER II.
CAPUT I.

CUm ſuperiori libro ea omnia explicata ſint, quæ ab aliis contra veritates Geometricas, primo Elementorum Euclidis libro contentas mota fuere; eaq; una demonſtrata, quæ in dubium jure vocari poſſunt, nec tamen ab Euclide ulla probatione ſunt confirmata, ſed ut vera & per ſe clara, ab ipſo aſſumpta: hoc ſequenti libro ea nobis pertractare animus eſt, quæ ad confutationem eorum ſpectant, quæ Marcus Meibomius, in dialogo de proportionibus, & contra Euclidem, & contra alios veteres novosq; Geometras falſa in medium adduxit. Equidem ſi Meibomius ex eo capite accuſationem ſuam contra Euclidem fuiſſet exorſus, quo P. Ramus uſus eſt, nempe multa ſcitu neceſſaria Euclidem omiſiſſe, atq; ea quæ habet, ſatis confuſe tradidiſſe, nec

nec omnia demonſtraſſe quæ demonſtrari debebant, ſed multa pro veris ſuppoſuiſſe, quæ vera quidem ſunt, à Geometra autem ſupponi non debent ſine demonſtratione: facile qvidem & me, & alios ſibi habuiſſet ὁμοψήφους. Nunc vero quoniam his omnibus omiſſis, falſa ſe heic inveniſſe dicat, ipſaq; principia libri V. Elementorum convellere & labefactare conetur, quæ tamen longe ſunt veriſſima, ut in ſeqventibus patebit, operæ precium me facturum arbitrabar, ſi & ipſius Euclidis ſententiam totamq; illam doctrinam, qua maxime fieri poſſet brevitate explicarem, & veritate harum rerum demonſtrata, fontes erroris Meibomiani detegerem, ipſiusq; argumenta refellerem. Quoniam vero hæc doctrina, quæ eſt de majore aut minore ratione, accurate demonſtrari aut intelligi non poſſit, niſi altera illa quæ eſt de rationum compoſitione huic adjungatur; qnam quidem Meibomius Euclidem alioſq; veterum intellexiſſe & bene etiam tradidiſſe ait, poſteriores autem Geometras veterum mentem non cepiſſe, ſed multa perperam innovaſſe; totam hanc rationum & proportionum naturam benevolo lectori ob oculos ponere decrevi, ut & illi, qui in Mathematicis non usq; adeo ſunt verſati, ut penitiora ipſius intelligant, per ſe tamen perſpiciant, quid illud ſit, quod Meibomius contra Euclidem & Geometras ſe inveniſſe gloriatur; ac demum ſciant quam ſolida ac certa ſint Geometriæ principia, & quam male ſibi ipſis conſulant, qui in his diſciplinis probabilita-

Digitized by Google

bilitatem ponunt, taliaq; admittunt, quæ in utramque partem diſputari poſſunt. Adſis Ieſu & faue.

CAP. II.

Quantum Geometræ vocant omne illud quod vel menſura, vel numero, vel pondere comprehenditur; ſeu quod idem eſt, vel juxta magnitudinem conſideratur, vel juxta multitudinem, vel juxta pondus. Architas Tarentinus perantiqvus & celeberrimus Geometra, Τᾶς ποσότητος inqvit διαφοραὶ τρεῖς. Τὸ μὲν γὰρ αὐτᾶς ἐντὶ ἐν ῥοπᾷ ὡς τὸ τάλαντον. Τὸ δὲ ἐν μεγέθει, ὡς τὸ δίπαχυ. Τὸ δὲ ἐν πλάθει ὡς τὰ δέκα. *Qvantitatis differentiæ tres. Vel enim in pondere conſiſtit, ut talentum: vel in magnitudine, ut bicubitale: vel in multitudine, ut decem.* Hoc vero quantum vel in ſe conſideratur, vel quatenus reſpectum habet ad aliud. Atq; in ſe quidem, quatenus certam habet magnitudinem, certove numero aut pondere comprehenditur. In ſingulis enim quanti ſpeciebus hæc diverſo modo conſiderantur. In magnitudine enim, & figura, ut trangulare, quadratum, pentagonon &c. In multitudine autem ſeu numero ſola ποσότης: In ponderibus vero gravitas, qvorum natura & affectiones in diſtinctis ſcientiis explicantur, magnitudinum quidem in Geometricis, Numerorum in Arithmeticis, & ponderum in Staticis, quæ tamen ſcientiæ plurima communia principia habent, communesq; demonſtrati-

ſtrati-

Digitized by Google

ſtrationes & veritates, qvamvis in quibusdam etiam diſſideant.

Inter alia vero quæ communia habent, etiam hoc eſt, quod, cum ejuſdem generis aut ſpeciei quanto ſingula conferri poſſint, magnitudo quidem cum magnitudine, numerus cum numero, & pondus cum pondere: quæ quidem collatio ſeu mutuus reſpectus λόγος Græcis dicitur; Latinis ratio.

In Geometricis autem hanc rationem ita definit Euclides Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. *Ratio eſt, duarum magnitudinum ejuſdem generis, quæcunq; mutua relatio ſecundum qvantitatem.* In Arithmeticis autem ratio erit, quæcunque mutua duorum nunerorum relatio ſecundum quantitatem. Ac deniq; in Staticis ratio erit mutua duorum ponderum habitudo ſecundum quantitatem. Notandum vero eſt in Arithmeticis quemcunq; numerum finitum & terminatum cum quocunq; numero finito & terminato conferri poſſe, ſicut etiam pondera cum ponderibus. In Geometricis autem non quamcunq; magnitudinem cum quacunq; magnitudine poſſe comparari. Neque enim ratio rectæ lineæ ad quadratum dari poteſt. Duo quidem quadrata poſſunt invicem eandem habere rationem, quam linea ad lineam. Neq; tamen ideo ratio lineæ ad quadratum datur. In Arithmeticis autem & Staticis inter quoſcunq; numeros datos & inter quæcunq; pondera data, etiam ratio datur.

Omnis autem ratio duobus terminis comprehenditur, prior dicitur: terminus à quo ſeu antecedens; alter terminus ad quem ſeu conſequens. Pro diverſitate autem horum terminorum diverſæ rationes conſtituuntur.

Si enim ambo termini æquales fuerint, oritur ratio æqualitatis. Ut ſi duę lineæ æquales fuerint, vel duo qvadrata, duóve cubi, aut ſolida corpora æqualia. In numeris autem ut 1. ad 1. vel 2. ad 2. 6. ad 6. atque ſic in infinitum. In ponderibus denique talentum Atticum ad talentum Atticum, & mina ad minam, & libra ad libram.

Si autem termini inæquales fuerint, oritur ratio inæqualitatis: eſtq; duplex, exceſſûs, vel defectûs. Etenim vel antecedens terminus major eſt conſequente, adeoque excedit terminum alterum, unde ratio eſt exceſſus. Scholiaſtes Græcus Euclidis vocat λόγον τῆς ὑπεροχῆς rationem exceſſûs, apte admodum ac concinne, quam recentiores quidam majoris inæqualitatis dixere; ſicut alteram huic oppoſitam minoris inæqualitatis, quæ rectius juxta priora ratio defectus dicitur, quando nempe antecedens minus eſt conſequente. Ut ſi quadratum cujus area eſſet cc. pedum quadratorum, conferretur cum quadrato areæ C. pedum quadratorum: ſi prius quadratum eſſet antecedens, & poſterius conſequens: ratio exceſſûs diceretur. Ita in numeris ratio 2. ad 1. eſt ratio exceſſûs ſeu τῆς ὑπεροχῆς, ratio autem 1. ad 2. eſt ratio

tio defectûs. Idipſum in ponderibus liquet. Ratio enim talenti ad minam; libræ, ad unciam eſt exceſſûs: ratio autem minæ ad talentum, vel unciæ ad libram eſt ratio defectûs.

Et in numeris quidem hæc ratio ſemper cognita eſt & effabilis. Semper enim datur exceſſus unius numeri ſuper alium, qui alio numero exprimitur. In magnitudinibus autem ratio illa non ſemper exprimi poteſt. Sic ratio diagonalis quadrati ad latus ejuſdem, eſt ineffabilis. nullo enim numero exprimi poteſt, ut Euclidi eſt demonſtratum Elem. lib. X. propos. CXVIII. quo in libro. duo quidem genera magnitudinum commenſurabilium proponit, unum quod abſolute eſt commenſurabile, cuicunq; datæ magnitudini, adeoq; ratio inter ea ſe habet ut numerus ad numerum. Sic magnitudo 100. pedum magnitudini 10. pedum eſt commenſurabilis, adeoque duæ hæ magnitudines rationem habent effabilem λόγον ῥητόν ſeu quam 100. ad 10. numerus ad numerum. Alterum eſt potentia commenſurabile: ut diagonalis quadrati ad latus, ſimpliciter qvidem & abſolute loquendo commenſurabilis non eſt; potentia tamen invicem commenſurantur. Quadratum enim deſcriptum ſuper diagonali, eſt duplum quadrati alterius per XLVII. I. Elem. adeoque qvadrata horum ſunt commenſurabilia, & habent ſe ut numerus ad numerum, 2. ad 1. Cœtera vero quæ neque longitudine, neque qvantitate ſunt commenſurabilia, irrationalia dicuntur, qvod ratio

eorum numeris, nullo modo explicari poſſit. vide V. VI. & VII. propoſitiones libr. X. Elem. Euclidis, & præcipue X. ubi modus docetur inveniendi magnitudinem datæ magnitudini incommenſurabilem, tam magnitudine, quam potentia.

In Geometricis ergo alia ratio eſt effabilis, alia ineffabilis. Effabilis qvæ certo numero explicatur; ineffabilis, quæ certo numero non explicatur. qvæ quidem omnia ab Euclide demonſtrantur libro X. Elem. Propoſ. V. VI. VII. & VIII. In Arithmeticis autem omnes numeri ſunt effabiles. Proclus libro II. comm. in I. Eucl.. Τὸ μὲν γὰρ πάντα λόγον εἶναι ῥητὸν ἀριθμητικῇ προσήκει μόνον, Γεωμετρίᾳ δὲ οὐδαμῶς. Ἐισὶ γὰρ ἐν αὐτῇ καὶ ἄρρητοι λόγοι. Τὰ δὲ τῶν συμμέτρων ἀριθμητικὴ μὲν θεωρεῖ πρώτως, γεωμετρία δὲ δευτέρως, ἐκείνην μιμουμένη. διὸ καὶ τὰ σύμμετρα τούτων ταῦτα ἀφορίζεται ὅσα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, ὡς τῆς συμμετρίας προηγουμένως ἐν ἀριθμοῖς ὑφισταμένης. Ὅπου γὰρ ἀριθμὸς ἐκεῖ καὶ τὸ σύμμετρον. καὶ ὅπου τὸ σύμμετρον, ἐκεῖ καὶ ὁ ἀριθμός. *Nam quod omnes rationes ſint effabiles, id ſoli convenit Arithmeticæ, non vero Geometriæ. Sunt enim in hac etiam ineffabiles rationes.* Et poſt aliquot verba. *Ea autem quæ ſunt commenſurabilia inuicem, Arithmetice qvidem primario conſiderat, Geometria autem ſecundariò, Arithmeticen imitata. Qvapropter commenſurabilia in Geometricis definiuntur, qvæ rationem*

Digitized by Google

tionem habent invicem qvă numerus ad numerum. Ubi enim numerus illic commenſurabile. & ubi commenſurabile, illic etiam numerus.

Differunt ergo inter ſe rationes Geometricæ & Arithmeticæ, quod hæ qvidem omnes accurate explicari poſſint, illæ vero non item. Nec tamen ideo Arithmeticæ rationes perfectiores Geometricis. Poſſunt enim in Geometricis qvadrata juxta qvamcunq; rationem dari, duplam, triplam, qvintuplam, imo qvamcunque. In Arithmeticis vero id fieri neqvit. Quadratum enim alterius qvadrati duplum in Arithmeticis non datur.

Quod vero de magnitudinibus verum eſt, qvaſdam inter eas eſſe incommenſurabiles, adeoq; earum rationes inexplicabiles; id etiam in ponderibus locum habet. Poſſunt enim pondera non minus qvam magnitudines in infinitum ſecari.

Prima ergo differentia rationum eſt, qvod reſpectu terminorum, aliæ ſint æqvalitatis, aliæ inæqvalitatis. Secunda, qvod reſpectu eorundem terminorum, aliæ ſint effabiles, aliæ ineffabiles. Prior omnibus rationibus, tam Arithmeticis qvam Geometricis convenit: poſterior in Arithmeticis locum non habet; qvod illic omnes rationes ſint effabiles.

Porro rationes inæqvalitatis tam exceſſûs quam defectûs, in Arithmeticis qvidem qvinque ſpecies conſtituunt, qvæ etiam in effabilibus Geometricis eædem ſunt. Si enim duo inæqales numeri invicem

conferantur, is qvi major eſt altero, vel totum in ſe comprehendit aliquoties: vel non comprehendit. Si totum in ſe bis, terve, aut pluries continet, major dicitur multiplus, minor vero pars: ut binarius unitatatis, & ternarius unitatis, ſenarius binarii. continet enim ſenarius totum binarium in ſe ter. Atq; hoc ipſum in magnitudinibus verum eſt. Si enim magnitudo bis, ter, qvaterve compoſita, aliam magnitudinem fecerit, compoſita magnitudo multiplum dicitur: ea vero ex qua componitur pars. Euclides initio V. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος. *Pars eſt magnitudo magnitudinis minor, majoris, qvando menſurat majus. Multiplum vero eſt majus minoris quando menſuratur à minore.* Menſurare Geometris dicitur qvod multiplicatum alterius qvantitatem exactè æquat, neque majus eſt, neque minus. Sic ulna menſurat longitudinem centum ulnarum. Si enim ulna centies multiplicetur, æquabit longitudinem centum ulnarum. Quod ſi longitudo fuerit centum ulnarum & trium quartarum, tum illa iſtam longitudinem accurate menſurare non poteſt, verum alia tum menſura requiritur, nempe qvarta pars ulnæ. Adeoque ulna quidem propriè atq; accurate loquendo magnitudinis centum ulnarum pars eſt, non vero centum ulnarum & trium qvartarum: cum eam non

meti-

Digitized by Google

metiatur. Ita qvarternarius ſenarii pars non eſt, cum illum non metiatur. Proprie ergo loquendo, pars eſt, quæ in alio bis aut ſæpius perfecte continetur, ut binarius in qvaternario, ſenario &c. ternarius in ſenario, novenario, & ſic in infinitum. Et is qui alium in ſe continet numerus multiplus dicitur, & quantitas qvæcunque multipla.

Quando ergo antecedens terminus conſequentis multiplus fuerit, ratio dicitur multipla. Theo Smyrnæus libro de muſica cap. XXIII. Πολλαπλάσιος μὲν οὖν ἐστι λόγος ὅταν ὁ μείζων ὅρος πλεονάκις ἔχῃ τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ μείζων ὅρος καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἀπαρτιζόντως ὡς μηδὲν ἔτι λείπεσθαι ἀπ' αὐτοῦ. καὶ κατ' εἶδος τοσαυταπλασίων, ἕκαστος πολλαπλάσιος ὁ μείζων ὅρος λέγεται τοῦ ἐλάττονος ὁσάκις ἂν καταμετρῆται ἀπ' αὐτοῦ, οἷον ἂν μὲν δὶς, διπλάσιος, ἂν μὲν τρὶς, τριπλάσιος, ἂν μὲν τετράκις, τετραπλάσιος. καὶ κατὰ τὸ ἑξῆς οὕτως. *Eſt itaq; ratio multiplex qvando major terminus pluries continet minorem: id eſt, qvando majorem terminum minor integre metitur, nec ulla pars majoris reſidua ſupereſt. Et juxta eam ſpeciem multiplicationis, unusquisq; major terminus multiplex minoris dicitur, juxta quā à minore menſuratur; ut ſi bis, dupla; ſi ter, tripla, ſi quater, quadrupla, & ſic in ſeqventibus.* Hac ratione magnitudo XII. pedum, dupla quidem eſt ſex pedum: tripla, qvatuor pedum; qvadrupla, trium; ſextupla, duum,

& duodecupla unius pedis. Et hæc prima ſpecies eſt effabilium rationum exceſſûs.

Huic contraria ab altera parte eſt effabilis ratio defectûs, qvæ ſubmultipla dicitur, qvando nempe terminus antecedens eſt pars, conſequens vero multiplex. Ἀνάπαλιν δὲ inquit Theo loco laudato ὁ ἐλάττων τοῦ μείζονος, μέρος ὁμώνυμον τῷ λόγῳ, κατὰ μὲν τὸ διπλάσιον ἥμισυ κατὰ δὲ τὸ τριπλάσιον τριτημόριον. καὶ λόγος ὁ μὲν ἡμίσεος, ὁ δὲ τριτημόριος, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως. *Inverſo autem modo ſe habet minor ad majorem. Et pars qvidem rationi homonyma eſt. Pars enim dupli vocatur ſemis, tripli vero triens. Illa autem ratio ſubdupla dicitur ſeu dimidia hæc ſubtripla, & ſic in aliis.* Ita ratio duûm ad quatuor eſt ſubdupla: ratio 2. ad 6. ſubtripla: 2. ad 8. ſubqvadrupla: 2. ad 10. ſubquintupla: 2. ad 12. ſubſextupla: 2. ad 14. ſubſeptupla: & ſic in infinitum. Liquet ergo ex his qvid ſit ratio ſubdupla, ſubtripla, ſubquadrupla. nempe qvæ his cyphris indicantur $\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ fitq; quando terminus antecedens conſequentis termini, vel dimidius eſt ſeu ſubduplus, vel tertia quartave ejusdem pars.

CAP. III.

Quando autem antecedens terminus, nec pars eſt conſequentis, nec multiplex ejusdem, & tamen eidem inæqualis, alia oritur ratio. Si enim antecedens majus fuerit conſequente, ita tamen ut totum in ſe conſequens

quens aliquoties non contineat, utiq; excedet illud vel una ſui parte, vel pluribus. Si una parte, antecedens vocatur ἐπιμόριος; ſi pluribus partibus, ἐπιμερής. De priori ita Nicomachus Geraſenus Arithmetices libr. I. Ἐπιμόριος δέ ἐστιν ἀριθμὸς τὸ τοῦ μείζονος δεύτερον τῇ φύσει καὶ τῇ τάξει εἶδος, ὁ ἔχων ἐν ἑαυτῷ τὸν συγκρινόμενον ὅλον, καὶ μόριον αὐτοῦ ἕν τι. Ἀλλ' ἐὰν ἥμισυ ᾖ τὸ μόριον, καλεῖται ἡμιόλιος εἰδικῶς ὁ τῶν συγκρινομένων μείζων, ὑφημιόλιος δὲ ὁ ἐλάσσων. Ἐὰν δὲ τρίτον, ἐπίτριτός τε καὶ ὑπεπίτριτος, καὶ ἀεὶ οὕτως, μέχρι παντὸς προχωροῦντι συμφωνήσει σοι. *Numerus autem epimorius (ſeu ſuperparticularis) ſecunda majoris numeri ſpecies eſt, & natura & ordine, qui quidem in ſe continet correlatum totum & unam ipſius partem. Quæ quidem pars ſi dimidia fuerit, major collatorum numerorum vocatur ſeſquialter, minor vero ſubſeſqvialter: ſi vero tertia pars; ſeſquitertius & ſubſeſquitertius: atq; ita in perpetuum quoaduſque progrediaris, ſemper tibi convenient.* Ratio ergo inter tales numeros, talesve magnitudines vocatur ἐπιμόριος. Theo Smyrnæus lib. II. cap. 24. Ἐπιμόριος δέ ἐστι λόγος ὅταν ὁ μείζων ὅρος ἅπαξ ἔχῃ τὸν ἐλάττονα καὶ μόριον ἕν τι τοῦ ἐλάττονος, τουτέστιν, ὅταν ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονος ταύτην ἔχῃ τὴν ὑπεροχὴν ἥτις τοῦ ἐλάττονος ἀριθμοῦ μέρος ἐστίν, ὡς ἡ τετρὰς τῆς τριάδος. ὑπερέχει γὰρ αὐτῆς μονάδι, ἥτις ἐστὶ τῆς τριάδος τὸ τρίτον. καὶ ἡ ἑξὰς τῆς τετρά-

δος ὑπερέχει δυοῖν, ἅλινα τῶν τεσσάρων ἥμισύ ἐστι. Διὸ καὶ ἀπὸ τῆς τῶν μερῶν ὀνομασίας ἕκαστος τῶν ἐπιμορίων ἰδίας ἔτυχε προσηγορίας. Ὁ μὲν γὰρ τῷ ἡμίσει τοῦ ἐλάττονος μέρει ὑπερέχων, ἐφημιόλιος ὠνομάσθαι, ὡς ἡ τριὰς τῆς δυάδος, καὶ ἡ ἑξὰς τῆς τετράδος. αὐτήν τε γὰρ ὅλην ἔχει τὴν ἐλάττονα καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ἐν μὲν γὰρ τριάδι ἔνεστιν ἡ δυὰς, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς ἡ μονάς. ἐν δὲ τῇ ἑξάδι, ἡ τετρὰς, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς ἡ δυάς. Πάλιν οἱ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἰλάττονες ὑπερέχοντες, ἐπίτριτοι καλοῦνται ὡς ἡ τετρὰς τῆς τριάδος. οἱ δὲ τῷ τετάρτῳ ὑπερέχοντες ἐπιτέταρτοι, ὡς ὁ ε΄ τῶν τεσσάρων, καὶ ὁ δέκα τῶν ὀκτὼ, καὶ ὁμοίως προκόπτοντες ἐπίπεμπτοί τε καὶ ἔφεκτοι καὶ ἐφέβδομοι ἐκλήθησαν πάντες οὗτοι ἐπιμόριοι ὄντες· *Ratio ſuperparticularis, eſt quando major terminus minorem ſemel continet & partem inſuper ipſius unam, id eſt qvando major minorem ſuperaverit exceſſu aliqvo, qui minoris numeri ſit pars, veluti quaternarius ſuperparticularis eſt ternarii. unitate enim excedit, quæ triens eſt ternarii, & ſenarius excedit quaternarium duabus unitatibus, quæ ſunt ſemis quaternarii. Quare à partium denominatione ſuperparticulares ſinguli proprias appellationes nanciſcuntur. Qui namq; minorem ſemiſſe ſuperat, ſeſquialter dicitur, ut ternarius binarii : & ſenarius quaternarii. ipſos enim minores totos continent, ipſorumq; ſemiſſes. In ternario, namq; binarius continetur, & unitas dimidium ejus. In ſenario quaternarius cum bina-*

binario ejus ſemiſſe. Qui tertiâ rurſus parte minorem ſuperant ſeſquitertii appellantur, ut quaternarius ternarii. Qui quartâ, vocantur ſeſquiquarti, ut 5. ſeſquiquartus eſt numeri 4. & denarius octonarii, & progrediendo pariter, ſeſquiqvinti, ſeſquiſexti & ſeſqui ſeptimi appellati ſunt omnes hi ſuperparticulares. Et paulo poſt. Τῶν δὲ ἐπιμορίων λόγων πρῶτος καὶ μέγιστος, ὁ ἡμιόλιος, ὅτι δὴ καὶ τὸ ἥμισυ μέρος πρῶτον καὶ μέγιστον καὶ ἐγγυτάτω τῷ ὅλῳ. μετὰ δὲ τοῦτον ὁ ἐπίτριτος, καὶ ἑξῆς ὁ ἐπιτέταρτος, καὶ οὕτω πάλιν ἐπ' ἄπειρον ἡ πρόοδος ἀεὶ ἐπ' ἐλάττονος. *Superparticularium vero rationum prima & maxima eſt ſeſquialtera, quia pars dimidia prima & maxima eſt, totiq; proxima. ſequitur illam ſeſqvitertia, deinde ſeſqviqvarta, idemq; eſt in infinitum decreſcendo progreſſus.* Quomodo autem ratio ſeſquialtera major ſit ratione ſeſquitertia, & hæc major qvam ſeſquiquarta, in ſequentibus explicabimus, ubi de majore & minore ratione erit agendum. Nunc tantum illud proponere volumus, qvod ad explicationem rationis ἐπιμορίου pertinet. Si ergo vel magnitudo magnitudinem, vel numerus numerum, vel pondus pondus ita excedat, ut major qvantitas totam minorem in ſe contineat, & partem præterea ejus qvamcunq; unam, major qvantitas minoris ἐπιμόριος dicitur. Sic magnitudo 100. pedum magnitudinis 99. pedum ἐπιμόριος eſt, & nu-

Digitized by Google

merus 100. numeri 99. ἐπιμόριος deniq; pondus 100. librar. ponderis 99. librarum eſt ἐπιμόριον. Pro diverſitate vero partium, diverſitas etiam rationum conſideratur. Etenim ſi magnitudo qvædam aliam magnitudinem totam in ſe contineat, & partem præterea ipſius dimidiam, major magnitudo minoris dicitur ſeſquialtera. Sic magnitudo 150. pedum magnitudinis 100. pedum eſt ſeſquialtera: & magnitudo 30. pedum ſeſquialtera magnitudinis viginti pedum, atq; ſic in infinitum. Atq; hoc ipſum in numeris obtinet. Etenim 150. ad 100. eandem habent rationem qvam 3. ad 2. hoc eſt rationem ſeſqvialteram. Quod etiam in ponderibus eodem plane modo ſe habere deprehenditur. Si vero major terminus minorem terminum totum in ſe contineat & partem præterea ipſius tertiam, major magnitudo minoris ſeſquitertia dicitur, & ratio ipſa ſeſquitertia. Sic ratio 1001. ad 1000. eſt ſeſquimilleſima. continet enim in ſe totum numerum & partem præterea ipſius milleſimam: eodem modo qvo Ciceroni in libro de univerſo ſeſquitertia & ſeſquioctava vocatur illa ratio qvæ Platoni in Timæo ἐπίτριτος & ἐπόγδοος dicitur, qua de re in ſequentibus data occaſione plenius agetur. Particula igitur ſeſqvi appoſita indicat magnitudinem alterius magnitudinis eſſe ἐπιμόριον, ſeu ſuperparticularem. Sic enim ratio ſeſquitertia apud Ciceronem eſt $\frac{4}{3}$ ſeu ἐπί-

τριτος

τρίτος Platonis: ratio ſeſqvioctava eſt ἐπόγδοος Platonis ſeu $\frac{9}{8}$. Excedit autem qvaternarius ternarium, una ternarii parte. & novenarius octonarium una parte octonarii. Et ſic 1001. eſt ſeſquimilleſimus 1000. excedit enim 1001. 1000. una parte milleſima Scio alios aliter loqvi & per ſeſquimilleſimum intelligere numerum 1500. Sed qui accurate & cum veteribus, imo cum Cicerone latine loqui & ſcribere velit, eam rationem ſequatur oportet, qvam nunc explicuimus. Id vero heîc una notandum erit, quod in rationibus dignoſcendis, ſemper ſit recurrendum ad minimos & primos nnmeros, qvi Græcis πυθμένες dicuntur. Sic $\frac{3}{2}$ eſt πυθμὴν magnitudinis & rationis ſeſquialteræ, $\frac{4}{3}$ eſt πυθμὴν ſeſquitertiæ, $\frac{5}{4}$ ſeſquiquartæ, & ſic in infinitum, de quibus hoc notat Nicomachus Geraſenus libr. I. Arithmetices Ὅτι οἱ μὲν πρῶτοι καὶ πυθμένες λεγόμενοι ἐγγὺς ἴσων ἀλλήλων ἐν τῷ φυσικῷ σχήματι, οἱ δὲ δεύτεροι ἀπὸ πυθμένων ἕνα μόνον ἀριθμὸν διαλείπουσιν, οἱ δὲ τρίτοι δύο, οἱ δὲ τέταρτοι τρεῖς, καὶ οἱ πέμπτοι δ', καὶ ἀεὶ οὕτως μέχρις οὗ βούλει. Ἔτι γε μὴν τὸ μόριον οὗ παρώνυμός ἐστιν ἕκαστος τῶν ἐπιμορίων, ἐν τοῖς ἥττοσι θεωρεῖται τῶν πυθμένων, ἐν δὲ τοῖς μείζοσι οὐδαμῶς. *Quod* (in ratione ἐπιμορίῳ,) *primi quidem numeri, & qui* πυθμένες *Græcis dicuntur* (quod ſint inſtar fundi reliquorum) *vicini ſint invicem juxta*

Digitized by Google

naturalem progreſſum. Qui vero ſecundi à πυθμένοις ſunt, uno numero diſtant; tertii vero duobus: quarti, tribus: & qvinti qvatuor, & ſic in perpetuum, qvoad uſq; progredi volueris. Præterea pars iſta, unde qvævis ſuperparticularium denominationem habet, in minoribus πυθμένων ſeu fundamentalium conſideratur, non vero in majoribus. Πυθμένες ergo, rationis ſeſquialteræ, ſeſquitertiæ, ſeſquiquartæ &c. ſunt $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{6}$ & ſic in infinitum. His vero proximi numeri ſunt $\frac{6}{4}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{10}{8}$, $\frac{12}{10}$. Terti autem ſunt $\frac{9}{6}$, $\frac{12}{9}$, $\frac{15}{12}$, $\frac{18}{15}$. Porro quarti ſunt $\frac{12}{8}$, $\frac{16}{12}$, $\frac{20}{16}$, &c. Primi autem ſunt vicini & connexi. connectuntur enim binarius & ternarius, quaternarius & quinarius, ſenarius & ſeptenarius immediate. Secundis autem unus numerus interponitur: inter quaternarium enim & ſenarium eſt qvinarius, inter 6. & 8. eſt 7. inter 10. & 12. eſt 11. Tertii autem duobus numeris ſeparantur. Inter ſenarium enim & novenarium, duo numeri ſunt, ſeptenarius & octonarius. Inter novenarium & duodenarium, denarius & undenarius. Deniq; inter qvartos numeros tres alii dantur, ut inter 8. & 12. dantur 9. 10. 11. & ſic in infinitum. Tantum de epimoriis ſeu ſuperparticularibus.

Hiſce vero inter rationes defectûs opponuntur ὑπεπιμόριοι, ſubſuperparticulares, qvando nempe conſequens continet in ſe totum antecedentem ſemel & unam præterea ipſius partem. Eſtq; totupla qvot ſuper-

Digitized by Google

ſuperparticularis. Vel enim ſubſeſquialtera eſt, quando nempe conſequens terminus antecedentis ſeſquialter fuerit, ut in numeris $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$ &c. vel ſubſeſquitertia ut $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, vel ſubſeſquiquarta ut $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{12}{15}$ atq; ita in infinitum. Πυθμένες vero, ſeu primi numeri harum rationum ſunt. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ & quotquot in inſinitum ſeipſos unitate ſuperant; hoc eſt, ut conſequens is qui Græcis ὑπόλογος dicitur, unitate excedat antecedentem ſeu τὸν πρόλογον. Multa in hac rem ex Nicomacho Geraſeno, aut Theone Smyrnæo in medium adferre ſupervacuum arbitror, cum res ipſa ſatis per ſe clara ſit.

CAP. IIII.

Quando autem antecedens, totum qvidẽ conſequentem ſemel tantum in ſe habet, eundem vero pluribus partibus excedit, ratio ἐπιμερὴς dicitur Latinis ſuperpartiens. In nũeris enim $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{5}$ antecedens comprehẽdit in ſe totum conſequentem, & partes præterea ejuſdem, vel duas, vel tres. Idipſum in cognitis atque effabilibus magnitudinibus & ponderibus locum habet. Magnitudo enim C. pedum ad magnitudinem LX. pedum rationem habet, quam quinq; ad tria, hoc eſt ſuperpartientẽ. Continet enim major magnitudo in ſe totam minorem, & duas præterea ipſius partes tertias. hoc eſt, ſi minor magnitudo in tres æqvales partes ſecetur, tum major, tales qvinq; partes habebit, qvales minor habet tres. Si enim LX. pedum magnitudo

in

Digitized by Google

in tres partes dividatur, cuivis parti convenient pedes XX. Sed qvinqvies XX. faciũt centũ, ergo centũ qvinq; tertias partes alterius habebit. Nicomachus Geraſenus lib. I. Arithmetices. Ἐστὶ δὲ ἐπιμερὴς μὲν σχέσις ὅταν ἀριθμὸς τὸ συγκρινόμενον ἔχῃ ἐν ἑαυτῷ ὅλον, καὶ προσέτι μέρη αὐτοῦ πλείονα ἑνός. Τὰ δὲ πλείονα ἑνὸς ἄρχεται πάλιν ἀπὸ τοῦ δύο καὶ πρόεισιν ἐπὶ πάντας τοὺς ἐφεξῆς ἀριθμοὺς, ὥστε τοῦ ἐπιμεροῦς πυθμὴν ἐστὶν εἰκότως ὁ πρὸς τῷ ὅλῳ δύο μέρη τοῦ ἀντισυγκρινομένου ἔχων καὶ κλητήσεται ἐπιδιμερὴς εἰδικῶς. Μετὰ δὲ τοῦτον ὁ τρία πρὸς τῷ ὅλῳ ἔχων κληθήσεται ἐπιτρίμερης (male in edito legitur ἐπιμερὴς) εἰδικῶς, καὶ μετὰ τοῦτον ἐπιτετραμερὴς, εἶτα ἐπιπενταμερὴς καὶ οὕτως ἀεί. Τὰ δὲ μέρη εἰκὸς ἔχει καὶ ἀρχὴν ἀπὸ τοῦ τρίτου. ἀδύνατον γὰρ ἐνθάδε ἀπὸ τοῦ ἡμίσου ἄρχεσθαι, ἄνευ γὰρ καὶ τινα ὑποθώμεθα δύο ἡμίση ἔχειν τοῦ ἀντιθέτου πρὸς τῷ ὅλῳ, λήσομεν ἑαυτοὺς πολλαπλάσιον ἀντὶ ἐπιμεροῦς τιθέντες. Ἕκαστον γὰρ ὅλον καὶ δύο ἡμίση αὐτοῦ συντιθέμενα διπλάσιον γίνεται τοῦ ἐξ ἀρχῆς. *Eſt vero ratio ſuperpartiens, qvando numerus totum illum, cui comparatur in ſeipſo habet, & præterea partes ipſius unâ plures. Partes vero iſtæ unâ plures, incipiunt à binario, atq; inde procedunt ad omnes ſequentes numeros. Fundum ergo rationis ſuperpartientis eſt numerus, qvi præter totum eum qvicum comparatur duas ipſius partes habet, & ſpeciatim ſuperbipartiens appellatur. Poſt*

hunc

Digitized by Google

hunc vero is, qvi præter totum tria habuerit, vocatur ſpeciatim ſupertripartiens, & poſt illum ſuperqvadripartiens, inde ſuperqvinquepartiens, & ſic porro in cæteris. Partes autem radicem & principium habent à ternario. Impoſſibile enim eſt in his à dimidio incipere; niſi unà aliqvem numerum ſupponamus, qvi præter totum oppoſitum numerum, duas præterea partes ipſius dimidias contineat. Sed tum qvidem pro ſuperpartiente multiplum ponemus. Totum enim compoſitum, una cum binis ſui partibus dimidiis, dat ſui ipſius duplum. Prima ergo & omnium ſimpliciſſima ratio ἐπιμερὴς ſeu ſuperpartiens eſt 5 ad 3. Excedit enim qvinarius ternarium binis partibus tertiis ternarii. Quaternarius enim excedit qvidem binariũ binis partibus, ſed ita ut partes illæ ipſius binarii ſint dimidiæ, adeoq; 4. multiplus eſt binarii, nempe duplus. Diſtingvitur autem multipla ratio à ſuperpartiente. Quæ ergo duabus, tribus, qvatuorve partibus, pluribusve in infinitum aliam excedit magnitudinem, neq; tamen eandem pluries in ſe continet quam ſemel, neq; ſuperparticularis eſt, rationem generat ſuperpartientem. Sic ratio 7. ad 4. eſt ſuperpartiens, & 8. ad 5. etiam ſuperpartiens. Qvæ pluribus perſeqvi, operæ precium non arbitror.

Opponitur autem rationi ſuperpartienti illa, cui præponitur particula ſub, nempe ſubſuperpartiens ὑπεπιμερὴς. eſtque qvando conſeqvens anteceden-

Digitized by Google

tem totum in ſe ſemel continet, & partes præterea ipſius plures una. Sic 4. ad 7. eſt ſubſuperpartiens & 5. ad 8. Atq; ſic in aliis.

Qvando autem antecedens totum minorem aliqvoties in ſe continet, & unam præterea ipſius partem, ratio πολλαπλασιεπιμόριος appellatur latinè multiplexſuperparticularis: cujus quidem rationis variæ ſpecies, tam reſpectu multipli, qvam ſuperparticularis. Etenim ſi bis in ſe contineat oppoſitũ totũ, pars vero excedens fuerit dimidia; ratio vocatur duplaſeſqvialtera: ſi pars tertia, duplaſeſqvitertia: & ſic duplaſeſqviqvarta, duplaſeſqviqvinta, duplaſeſqvioctava, & ſic in infinitum. Si multiplum, triplum fuerit; oriuntur rationes pro partium mutatione, triploſeſqvialtera, triploſeſqvitertia, triploſeſqviquarta, triploſeſqvimilleſima. Sic ratio 8001. ad 1000. eſt octuploſeſqvimilleſima. Sic ratio 925. ad 124. eſt noncuploſeſqvicenteſima. Atq; juxta hanc rationem in aliis omnibus. Si enim conſeqvens totum antecedentem ſæpius in ſe contineat, & unam præterea qvamcunq; ipſius partem, oritur ratio ſubmultiploparticularis, ut ratio 1000. ad 8001. ſuboctuploſeſqvimilleſima, & ſic in cœteris, ſubduploſeſqvialtera, ſubduploſeſqvitertia, ſubduploſeſqviqvarta. Tum ſubtriploſeſqvialtera, ut 2. ad 7. ſubtriploſeſqvitertia 3. ad 10.; & ſic in aliis. Qvod ſi antecedens totum conſequens in ſe contineat, & partes præterea ipſius una plures; ratio

tio vocatur ἐπιμερὴς & oppoſita huic σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει vocatur ὑποπολλαπλασιεπιμερὴς Latine multiplexſuperpartiens, & ſubmultiplexſuperpartiens. Sic ratio 18. ad 5. eſt triplaſupertripartiens, 17. ad 5. triplaſuperbipartiens: ratio autem 5. ad 18. eſt ſubtriplaſupertripartiens, & 5. ad 17. ſubtriplaſuperbipartiens.

Omnium ergo rationum exceſſûs, qvinque ſunt ſpecies effabiles, & defectus totidem, Multipla, ſuperparticularis, ſuperpartiens, multiplaſuperparticularis, multiplaſuperpartiens. Effabiles qvoq; rationes defectus totidem claſſes conſtituunt, apponendo prioribus particulam ſub. Submultipla, ſubſuperparticularis, ſubſuperpartiens, ſubmultiplaſuperparticularis, ſubmultiplaſuperpartiens. Quæ quidem in numeris accuratius perſpiciuntur. XII. enim ad 2. habet rationem ſextuplam, ad 3. qvadruplam, ad 4. triplam, ad 6. duplam: qvæ omnes rationes ſunt multiplæ. inverſæ autem harum ſubmultiplæ, nempe, binarii ad 12. ſubſextupla; ternarii ad 12. ſubqvadrupla; 4. ad 12. ſubtripla; 6. ad 12. ſubdupla. Rurſum 12. ad 8. habet rationem ſeſquialteram, ad 9. ſeſqvitertiam, ad 10. ſeſqviſextam, ad 11. ſeſqviduodecimam, qvæ omnes rationes ſunt ſuperparticulares, & his oppoſitæ σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει cum præpoſitione vocis ὑπὸ ſeu ſub (ut verbis Nicomachi Geraſeni utar) ὑπεπιμόριοι ſeu ſubſuperparticulares, nempe 8. ad 12. ſubſeſqvialtera Græce ὑφημιόλιος 9. ad 22. ſubſeſquitertia,

Græce ὑφεπίπεμπτος, 10. ad 12. ὑπέφεκτος ſubſeſqviſexta, & deniq; ὑπεπιδωδέκατος, ſubſeſqviduodecima 11. ad 12.

Porro 12. ad 7. habēt rationē ſuperpartientē, nempe illam qvæ Græce vocatur ἐπιπενταμερὴς, Latine ſuperquinquepartiens, ratio vero 7. ad 12. eſt ſubſuperpartiens ὑπεπιμερὴς, nempe ὑπεπίπεμπτος. Porro 11. ad 2. eſt qvintuplaſeſqvialtera & 2. ad 11. ſubqvintuplaſeſqvialtera. rurſum 11. ad 5. eſt duplaſeſqviſexta, & 5. ad 11. ſubdupla-ſeſqviſexta. Quæ ſunt rationes πολλαπλασιεπιμόριοι & ὑποπολλαπλασιεπιμόριοι multiplæſuperparticulares & ſubmultiplæſuperparticulares.

Deniq; 11. ad 5. eſt ratio duplaſuperbipartiens, 11. ad 3. ratio triplaſuperbipartiens, 11. ad 4. duplaſupertripartiens: & inverſa harum eadem nomina retinent σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει præponendo particulam ſub.

Atq; hoc qvod in numeris explicatum eſt, in magnitudinibus effabilibus eodem modo conſideratur. Ratio enim effabilis in magnitudinibus eſt, ut numerus ad numerum, ſicut Euclidi demonſtratum eſt libro X. Elem. Propoſ. V. VI. VII. Quæ vero rationes numeris explicari neqveunt, generaliter qvidem ineffabiles appellantur: ſuntq; vel majores ratione æqvalitatis, vel eadem minores. Si majores fuerint ratione æqvalitatis, adeoq; antecedens conſeqvens excedat,

Digitized by Google

cedat, λόγος ὑπεροχῆς ratio exceſſus dicitur: cui contraria eſt ratio defectus, qvæ ratione æqvalitatis minor eſt, qvando nempe antecedens minus eſt conſeqvente. Verum qvidem eſt, omnes illas qvas antea recenſuimus rationes, qvæ qvidem æqvalitatis non ſint, neceſſario vel exceſſûs eſſe, vel defectûs. Sed qvoniam ſingula earum ſpecialia habent nomina; hæ ineffabiles, cum ſingulari nomine careant, generali denominantur. Qvod vero rationes exceſſus rationibus æqvalitatis vere dicantur majores; & rationes defectus hiſdem minores: poſtea diductius demonſtrabimus.

CAP. V.

Atq; hactenus qvidem rationes juxta primam ipſarum generationem conſideravimus: nunc vero ulterius progrediundum, & affectiones ipſarum paulo accuratius inſpiciendæ. Primum ergo, qvod conſiderandum occurrit, hoc eſt: qvod aliæ rationes ſint ſimplices, aliæ compoſitæ. Simplices vel abſolute, tales ſunt, vel reſpective. Simplices abſolutè, qvæ omnis compoſitionis ſunt expertes. Simplices vero reſpective, ſeu ſecundum qvid, qvæ aliarum rationum reſpectu, qvæ ex his componuntur, ſimplices appellantur. Abſolute ergo ſimplices ſolæ rationes æqvalitatis ſunt, nullam enim compoſitionem agnoſcunt: omnes enim rationes æqvalitatis habent rationem, ut 1. ad 1. Ut vero intelligatur quid ſit com-

Digitized by Google

poſitio rationum , de ipſa compoſitione pauca dicemus.

Compoſitio eſt, qvando duæ res ita inter ſe junguntur, ut unam rem faciant majorem prioribus ſingulatim ſumptis, ſimul vero ſumptis æqvalem. Huic autem opponitur diviſio. Dixi compoſitum majus eſſe qvavis parte componente ſigillatim ſumptâ. Etenim cum duæ res ſeparatæ antea, invicem junctæ totum aliqvod efficiant; utiq; res illæ qvæ junguntur partes erunt componentes. Totum autem erit compoſitum. Eſt autem totum majus ſingulis ſuis partibus. Fit autem compoſitio, vel per additionem, vel per multiplicationem: ſicut diviſio per ſubtractionem vel diviſionem.

Quando enim linea 6. pedum adjicitur lineæ 6. pedum, totum eſt 12. pedum. Sic linea 5. pedum compoſita cum linea 13. pedum, hoc eſt adjecta lineæ 13. pedum, dat lineam 18. pedum. Idipſum in aliis quoq; magnitudinibus, tam effabilibus, qvam ineffabilibus, tum qvoq; in numeris omnis generis, omnibuſq; ponderibus verum deprehenditur.

Alia autem compoſitio fit per multiplicationem, qvando numerus in numerum, magnitudo in magnitudinem; & pondus deniq; in pondus ducitur. Sic duodenarius componitur ex ſenario ducto in binariũ, vel qvaternario ducto in ternarium: Octonarius ex qvaternario ducto in binarium. Sic rectangulum parallelogrammum ABCD componitur ex linea AB & BC

Digitized by Google

& BC in ſe ductis. Omnis enim linearum rectarum multiplicatio dat compoſitum, parallelogramum rectangulum. Quibus probè ac diligenter obſervatis, videndum porro eſt, qvalem compoſitionem rationes admittant.

Diximus vero antea omnem rationem duos habere terminos, antecedentem & conſeqventem. Si ergo rationes erunt componendæ, tum termini ipſi conjungendi, idq; vel per additionem, vel per multiplicationem.

Termini autem qvi conjunguntur vel ejuſdem rationis ſunt, vel diverſarum.

Ejuſdem rationis, qvando antecedens cujuſdam rationis, compoſitus cum conſeqvente ejuſdem rationis, dat alterius rationis antecedens. Euclides his verbis definit. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον. *Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis una cum conſeqvente ad idem conſeqvens.* Sic ratio 9. pedum ad 3. pedes erit compoſita ratio ex 6. pedum ad 3. pedes. Sic ratio 7. ad 2., hoc modo dicitur compoſita ex ratione 5. ad 2. Huic autem opponitur apud Euclidem diviſio rationis, qvæ his verbis definitur. Διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον. *Diviſio autem rationis eſt ſumptio exceſſûs, qvo antecedens excedit conſequens, ad idem conſequens.* Obſervandum vero eſt beneficio hujus com-

compoſitionis continuatæ, omnes rationes multiplas generari incipiendo ab æqvalitate. Si enim $\frac{1}{1}$ antecedens junctum conſeqventi, conferatur cum conſeqvente; erit ratio $\frac{2}{1}$ dupla. Si rurſum antecedens junctum conſeqventi conferatur cum eodem conſeqvente; oritur ratio $\frac{3}{1}$ tripla. Rurſum hoc antecedens junctum conſeqventi; dat rationem $\frac{4}{1}$ qvadruplam: & ſic in infinitum. Adeoq; hoc modo ratio $\frac{4}{1}$ qvadrupla componitur ex ratione æqvalitatis & ratione tripla: & ratio tripla, ex ratione æqvalitatis & ratione dupla: deniq; ratio dupla, ex ratione æqvalitatis hoc modo compoſita. Quod naturæ rerum apprime convenit. Eqvidem alii ut hanc compoſitionem melius demonſtrarent, alium introduxerunt modum compoſitionis per additionem. Cum enim obſervarent, ſi rationes æqvales adderentur, ita ut antecedens antecedenti, & conſeqvens conſeqventi conjungeretur; tum non majorem, nec aliam auctioremve rationem generari, ſed eandem plane cum priori: tantum antecedentes terminos conjunxerunt, eodem conſeqvente retento. Etenim ſi $\frac{1}{1}\,\frac{1}{1}$ addantur, ita ut antecedens antecedenti, & conſeqvens conſeqventi jungantur, oritur ratio $\frac{2}{2}$ qvæ eſt æqvalis $\frac{1}{1}$ rationi. Sic ſi $\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}$ addantur eo modo, oritur ratio $\frac{6}{4}$ qvæ eadem eſt cum ratione $\frac{3}{2}$. Qvamvis enim & antecedens terminus, & conſeqvens rationis $\frac{6}{4}$ excedant terminos rationis $\frac{3}{2}$ qvilibet, qvemlibet, ratio tamen eſt eadem. Ratio enim $\frac{3}{2}$ eſt ſeſqvialtera, ſicut & $\frac{6}{4}$ eſt ſeſqvialtera,

Digitized by Google

tera, & ut ſe habent tria ad duo, ſic ſe habent 6. ad 4. Hoc eſt ut ſe habent ſex pondo ad 4. pondo, ſic ſe habent 3. pondo ad duo pondo. Et ut centum ulnæ panni ad 30. homines veſtiendos ſic ſe habent 50. ulnæ ad 15. homines veſtiendos. Ratio eſt eadem, nempe dupla; quamvis termini utrinq; majores. Hoc itaque cum Geometræ & Mathematici animadverterent, facile conſiderarunt rationes per additionem terminorum utrinq; componi non poſſe. Quoniam vero viderent, in plurimis rebus, hanc rationum compoſitionem, quæ additione peragitur, magnum uſum habere: hoc modo eandem perfecere. Diverſarum enim rationum antecedentes terminos invicem additione conjunctos cum eodem conſequente compararunt, adeoq; certo modo compoſitam tationem habuere. Quamvis ſi accurate loqvi velimus, hæc compoſitio non eſt integrarum rationum; ſed tantum duorum terminorum: nempe vel ejuſdem rationis, ut in compoſitione, qvā juxta Euclidis mentē recenſuimus: vel antecedentium tantū terminorū diverſarum rationum. Et ſi poſteriori quidē modo compoſitio fiat, tū rationes multiplas eaſdē habebimus quas prius. Componatur enim ratio $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ datur ratio $\frac{2}{1}$. Antecedentia enim duæ unitates compoſitæ, dant duo: quæ collata cum unitate eodem conſequente, dant rationem duplam. Porro hæc rurſū compoſita cum rationę æqvalitatis, dat rationem triplam $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{1}$. Etenim duo & unum dant tria conſequens, autem idem eſt: ratio ergo eſt $\frac{3}{1}$. Si rurſum hæc ratio

Digitized by Google

cum ratione æqualitatis componatur, oritur ratio quadrupla. & ſic quintupla, ſextupla atq; in infinitum. In his vero omnibus rationibus, idem obtinetur methodo Euclidis, ſi nempe antecedens junctum conſequenti cum eodem conſequente comparetur, ut antea indicatum fuit. Si vero rationes alias eodem modo inveſtigare aut componere aliquis voluerit, id qvidem poſteriori methodo facillime fit. Ita enim ratio ſeſquialtera componitur ex ratione æqvalitatis, quæ integrum ſeu totum repræſentat, & ratione dimidia. $\frac{2}{2}\frac{1}{2}$ dat $\frac{3}{2}$. Ratio enim duo ad duo eſt æqualitatis; $\frac{1}{2}$ eſt ſubdupla, compoſita dat $\frac{3}{2}$. Sic ratio quintupla componitur ex ratione dupla & tripla. $\frac{2}{1}$ $\frac{3}{1}$ dant $\frac{5}{1}$. Habet vero hæc rationum compoſitio magnum in Mechanicis uſum, imo in omni vitæ genere. Sit enim v.g. lacus aliquis forma rectangulari oblongâ aquis plenus, cujus longitudo ſit pedum 500., latitudo 50. & profunditas 8. pedum. Aquæ ergo omnes lacus facient pedes cubicos 200000. Longitudo enim ducta in latitudinem, dat ſuperficiem 25000 pedum quadratorum, in quam ducta profunditas, dat totum corpus vel molem aqueam 200000. pedum cubicorum. Locum vero quam celerrime evacuatum velim. Habeo autem rotam decem concavitatum ſeu camerarum, quarum ſingulæ pedem unum cubicum exhauriunt, ipſa autem rota totaq; ipſius peripheria uno minuto horario unam facit circumgyrationem. Locum autem purgatum optarem ſpatio unius diei, vel etiam breviori,

Digitized by Google

viori, ſi fieri poſſet. Applico præter priorem rotam alias tres, quarum ſingulæ decem quoq; habeant concavitates, ſed triplo capaciores, ita ut ſingulæ tres pedes cubicos exhauriant: habeo præterea ad manum duas adhuc alias rotas quindecim cameris inſtructas, quarum ſingulæ exhauriunt duos pedes cubicos aquæ. Appoſitis ergo omnibus ſex rotis erit ratio unius cameræ primæ rotæ ad totam aquarum molem, $\frac{1}{200000}$. adeoq; totius rotæ $\frac{10}{200000}$ ſeu $\frac{1}{20000}$. Ratio porro alterius rotæ eſt ad totam aqvarum molem $\frac{3}{20000}$. Etenim cujuſvis cametæ ratio eſt $\frac{3}{200000}$. adeoque decem cauitatum erit $\frac{30}{200000}$ ſeu ut ſupra. Tres autem rotæ eodem modo ſunt conſtructæ, eandemque ſingulæ capacitatem habent. unde ratio earum eſt eadem. Denique rota quindecim cavitatum habet rationem ad totam aquarum molem $\frac{30}{200000}$. ſeu $\frac{3}{20000}$ qvævis enim cavitas capit 2. pedes cubicos, adeoque ratio cujuſq; cavitatis ad totam aquarum molem eſt $\frac{2}{200000}$ ſeu $\frac{1}{100000}$. unde 15. cavitatum erit $\frac{15}{100000}$ ſeu retento eodem conſequente $\frac{3}{20000}$. His ergo omnibus rationibus invicem compoſitis dabitur evaçuatio conveniẽs uni minuto horario, unde cognoſcetur evacuatio unius horæ, adeoq; qvanto tempore tota evacuatio contingat. Reductæ autem omnes rationes ad eundem terminum conſeqventem, habebunt ſe omnia juxta priora, poſita cujuſvis minuti evacuatione ut prius.

$\frac{1}{20000}$ $\frac{3}{20000}$ $\frac{3}{20000}$ $\frac{3}{20000}$ $\frac{3}{20000}$ $\frac{3}{20000}$.

Digitized by Google

Compoſitæ vero hæ rationes, dant rationem omnium rotarum ad totam aquarum molem ſingulis minutis $\frac{16}{20000}$ ſeu $\frac{1}{1250}$. Una ergo hora dabit 60 circumgyrationes, eritque ratio $\frac{60}{1250}$ ſeu $\frac{6}{125}$. Horis ergo 20. & 50′. totus lacus evacuabitur. In his ergo aliisq; plurimis exemplis hujus generis, hæc rationis compoſitio locum habet. Si enim tum per multiplicationem progredi vellem, nihil efficerem. Hoc ergo modo ex ratione $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$ compoſita dici poteſt ratio quintupla, quamvis compoſitio hæc valde ſit imperfecta, ut antea indicatum: cum non totæ rationes, ſed tantum termini earum antecedentes componantur.

Integra autem & perfecta compoſitio rationum eſt, quando duarũ rationũ exceſſûs ambo termini antecedens cum antecedente, & conſequens cum conſequente invicem conjunguntur. Talem vero compoſitionem additione fieri non poſſe, Geometræ ſtatim deprehenderunt. Etenim cum omnis compoſitio, rem compoſitam auctiorem & majorem reddere debeat, quam antea fuit: ergo cum id additione amborum terminorum invicem non ſemper fiat; ſed in omnibus quidem æqualibus rationibus totum ſit æquale ſingulis partium unde componitur, in aliis vero aliquando minus: ſequitur talem additionem compoſitionem appellari non debere. Si enim rationem triplam cum tripla ratione per additionem antecedentium invicem, & conſequentium invicem componere voluerim, ratio erit tripla. Habeat enim in figura

Digitized by Google

gura No. 2. AB. ad CD. rationem triplam; EF. ad GH. rationem triplam, dico, ſi AB. jungatur ipſi EF. & CD ipſi GH. tum totam ABEF. ad totam CDGH. habere rationem triplam. Si enim AB. fuerit 6. pedum, CD. erit 2. pedum. & ſi EF. fuerit 9. pedum GH. erit 3. pedum. Jungantur AB. & EF. tota AB EF. erit pedum 15. jungantur EFGH. tota EFGH. erit pedum 5. At 15. eſt triplum 5., ſicut 9. eſt triplum 3., & 6. triplum binarii. unde ratio ubique eadem, nempe tripla. Quod ſi ratio minor ratione æqvalitatis componatur: hoc modo cum ratione quacunq; exceſſus, tum totum minus erit ſua parte. ut ſi ratio $\frac{3}{1}$ ſeu $\frac{6}{2}$ componatur cum ratione $\frac{1}{2}$ prodit ratio $\frac{7}{4}$ At ratio $\frac{12}{4}$ ſeu $\frac{3}{1}$ eſt major ratione $\frac{7}{4}$. Liquet ergo ex his, rationes per additionem amborum terminorum antecedentium invicem & conſequentium invicem componi non poſſe, neque illam compoſitionem ullo modo eſſe legitimam, ſed potius diviſionē aliquam eſſe, de qvibus in ſequentibus. Scio quidem Ariſtotelem Rhetoricorum lib. III. c. VIII. hujus compoſitionis aliquam feciſſe mentionem. Verba qvatenus huc ſpectant adſcribam, Τῶν δὲ ῥυθμῶν ὁ μὲν ἡρῷος σεμνὸς καὶ λεκτικὸς καὶ ἁρμονίας δεόμενος. ὁ δὲ ἴαμβος αὐτή δὲ ἐστιν ἡ λέξις ἡ τῶν πολλῶν. ὁ δὲ τροχαῖος κορδακικότερος. λείπεται δὲ παιὰν ᾧ ἐχρῶντο μὲν ἀπὸ Θρασυμάχου ἀρξάμενοι, οὐκ εἶχον δὲ λέγειν τίς ἦν. Ἐστὶ δὲ τρίτος ὁ παιὰν καὶ ἐχόμενος τῶν εἰρημένων. τρία γὰρ πρὸς δύο ἐστίν. Ἐκείνων δὲ, ὁ μὲν ἓν πρὸς ἕν, ὁ δὲ δύο πρὸς ἕν.

Ἔχεται δὲ τῶν λόγων τύπων ὁ ἡμιόλιος. οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ παιάν. *Ex rhythmis vero Herous grandis & dictioni accommodatus & Harmoniæ indigens. Jambus vero ipſa eſt elocutio multitudinis Trochæus autē magis ſaltationi coveniens. Relinqvitur Pæan, quo uſiſunt incipientes à Thraſymacho. Non potuerunt vero dicere quinam eſſet. Tertius autem eſt Pæan, & continet jam dictos. Eſt enim ut tria ad duo illorum autem unus eſt, ut* 1. *ad* 1., *alter ut duo ad unum. Has vero rationes continet ſeſqvialtera, quæ eſt Pæan.* Porro indicat, de quo Pæane verba faciat. duos enim Pæanes contrarios dicit. *Unus enim eſt* οὗ ἄρχει μὲν ἡ μακρὰ, τελευτῶσι δὲ τρεῖς βραχεῖαι, ἕτερος δὲ ἐξ ἐναντίοις, οὗ βραχεῖαι ἄρχουσι τρεῖς, ἡ δὲ μακρὰ τελευταία. *qvi incipit à longa, terminatur tribus brevibus* (cujus ſignum in Poeticis eſt *-vvv*) *alter vero ex contrariis incipit tribus qvidem brevibus, una longa.* (cujus ſignum eſt in Poeticis *vvv-*) Herous ſeu dactylus componitur ex una longa, duabus breuibus. una autem longa æquatur binis brevibus. ergo ratio dactyli eſt 2. ad 2. ſeu 1. ad 1. Jambus vero componitur ex brevi & longa *v-*, hoc eſt ex tribus brevibus, eſtq; ut unum ad duo. Trochæus autem ex longa & brevi, eſtq; duo ad unum. Unus ergo Pæan componitut ex dactylo & jambo, vel ut terminum Ariſtotelis retineamus, continet dactylum & jambum, ſeu rationem æqvalitatis & ſubduplam $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$, unde oritur ratio ſubſeſqvialtera. antecedentia enim adjecta conſeqventibus, dant rationē $\frac{2}{3}$. Alter vero Pæan, qvem vulgo qvartum vocant, conti-

net

net dactylum & Trochæum ſeu rationem $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{1}$ adeoque eſt ἡμιόλιος. Adjecta enim antecedentia antecedentibus, & conſequentia conſequentibus dant rationem $\frac{3}{2}$. Nec tamen hæc terminorum conjunctio compoſitio appellatur Ariſtoteli, neque proprie loqvendo compoſitio eſt. Etenim una partium eſt major toto: ratio nempe dupla eſt major ratione ſeſqvialtera, adeoque trochæus major qvam Pæan quartus: qvod eſt perabſurdum. Unicus ergo modus componendi rationes totas perfectè, antecedentia nempe cum antecedentibus, & conſeqventia cum conſequentibus, fit per multiplicationem, qvando nempe antècedens cum antecedente, & conſequens cum conſequente multiplicatur, qvi qvidem qvatenus ad lineas pertinet, ab Euclide propoſitus eſt libro VI. Elementorum propoſitione XXIII. ubi demonſtrat æqviangula parallelogramma, rationem invicem habere ex lateribus conjunctã. Nempe ſi datæ fuerint qvæcunque rationes exceſſûs in lineis, ſiue effabiles, ſive ineffabiles, parallegrammum rectangulũ ex antecedentibus terminis conſtructum, ad parallelogrammum rectangulum ex conſequentibus terminis, habebit rationem compoſitam ex his binis rationibus.

Sint enim datæ duæ rationes exceſſûs AB. ad BC. & BD. ad BE. conſtituatur ex AB. & BD. antecedentibus terminis parallelogrammum rectangulum; & aliud ex conſequentibus BC. & BE. Quoniam ergo hæc bina

Ἔχεται δὲ τῶν λόγων τούτων ὁ ἡμιόλιος. οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ παιάν. *Ex rhythmis vero Herous grandis & dictioni accommodatus & Harmoniæ indigens. Jambus vero ipſa eſt elocutio multitudinis Trochæus autẽ magis ſaltationi coveniens. Relinqvitur Pæan, quo uſi ſunt incipientes à Thraſymacho. Non potuerunt vero dicere quinam eſſet. Tertius autem eſt Pæan, & continet jam dictos. Eſt enim ut tria ad duo illorum autem unus eſt, ut 1. ad 1., alter ut duo ad unum. Has vero rationes continet ſeſqvialtera, quæ eſt Pæan.* Porro indicat, de quo Pæane verba faciat. duos enim Pæanes contrarios dicit. *Unus enim eſt* οὗ ἄρχει μὲν ἡ μακρὰ, τελευτῶσι δὲ τρεῖς βραχεῖαι, ἕτερος δὲ ἐξ ἐναντίοις, οὗ βραχεῖαι ἄρχουσι τρεῖς, ἡ δὲ μακρὰ τελευταία. *qvi incipit à longa, terminatur tribus brevibus* (cujus ſignum in Poeticis eſt *-vvv*) *alter vero ex contrariis incipit tribus qvidem brevibus, una longa.* (cujus ſignum eſt in Poeticis *vvv-*) Herous ſeu dactylus componitur ex una longa, duabus breuibus. una autem longa æquatur binis brevibus. ergo ratio dactyli eſt 2. ad 2. ſeu 1. ad 1. Jambus vero componitur ex brevi & longa *v-*, hoc eſt ex tribus brevibus, eſtq; ut unum ad duo. Trochæus autem ex longa & brevi, eſtq; duo ad unum. Unus ergo Pæan componitut ex dactylo & jambo, vel ut terminum Ariſtotelis retineamus, continet dactylum & jambum, ſeu rationem æqvalitatis & ſubduplam $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$, unde oritur ratio ſubſeſqvialtera. antecedentia enim adjecta conſeqventibus, dant rationẽ $\frac{2}{3}$. Alter vero Pæan, qvem vulgo qvartum vocant, conti-

net

net dactylum & Trochæum ſeu rationem $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{1}$ adeoque eſt ἡμιόλιος. Adjecta enim antecedentia antecedentibus, & conſequentia conſequentibus dant rationem $\frac{3}{2}$. Nec tamen hæc terminorum conjunctio compoſitio appellatur Ariſtoteli, neque proprie loqvendo compoſitio eſt. Etenim una partium eſt major toto: ratio nempe dupla eſt major ratione ſeſqvialtera, adeoque trochæus major qvam Pæan quartus: qvod eſt perabſurdum. Unicus ergo modus componendi rationes totas perfectè, antecedentia nempe cum antecedentibus, & conſeqventia cum conſequentibus, fit per multiplicationem, qvando nempe antecedens cum antecedente, & conſequens cum conſequente multiplicatur, qvi qvidem qvatenus ad lineas pertinet, ab Euclide propoſitus eſt libro VI. Elementorum propoſitione XXIII. ubi demonſtrat æqviangula parallelogramma, rationem invicem habere ex lateribus conjunctã. Nempe ſi datæ fuerint qvæcunque rationes exceſſûs in lineis, ſiue effabiles, ſive ineffabiles, parallegrammum rectangulũ ex antecedentibus terminis conſtructum, ad parallelogrammum rectangulum ex conſequentibus terminis, habebit rationem compoſitam ex his binis rationibus.

Sint enim datæ duæ rationes exceſſûs AB. ad BC. & BD. ad BE. conſtituatur ex AB. & BD. antecedentibus terminis parallelogrammum rectangulum; & aliud ex conſequentibus BC. & BE. Quoniam ergo hæc bina

"Εχέται δὲ τῶν λόγων τούτων ὁ ἡμιόλιος. οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ παιάν. *Ex rhythmis vero Herous grandis & dictioni accommodatus & Harmoniæ indigens. Jambus vero ipſa eſt elocutio multitudinis Trochæus autē magis ſaltationi coveniens. Relinqvitur Pæan, quo uſiſunt incipientes à Thraſymacho. Non potuerunt vero dicere quinam eſſet. Tertius autem eſt Pæan, & continet jam dictos. Eſt enim ut tria ad duo illorum autem unus eſt, ut 1. ad 1., alter ut duo ad unum. Has vero rationes continet ſeſqvialtera, quæ eſt Pæan.* Porro indicat, de quo Pæane verba faciat. duos enim Pæanes contrarios dicit. *Unus enim eſt* οὗ ἄρχει μὲν ἡ μακρὰ, τελευτῶσι δὲ τρεῖς βραχεῖαι, ἕτερος δὲ ἐξ ἐναντίοις, οὗ βραχεῖαι ἄρχουσι τρεῖς, ἡ δὲ μακρὰ τελευταία. *qvi incipit à longa, terminatur tribus brevibus* (cujus ſignum in Poeticis eſt *-vvv*) *alter vero ex contrariis incipit tribus qvidem brevibus, una longa.* (cujus ſignum eſt in Poeticis *vvv-*) Herous ſeu dactylus componitur ex una longa, duabus breuibus. una autem longa æquatur binis brevibus. ergo ratio dactyli eſt 2. ad 2. ſeu 1. ad 1. Jambus vero componitur ex brevi & longa *v-*, hoc eſt ex tribus brevibus, eſtq; ut unum ad duo. Trochæus autem ex longa & brevi, eſtq; duo ad unum. Unus ergo Pæan componitut ex dactylo & jambo, vel ut terminum Ariſtotelis retineamus, continet dactylum & jambum, ſeu rationem æqvalitatis & ſubduplam $\frac{1}{1}\,\frac{1}{2}$, unde oritur ratio ſubſeſqvialtera. antecedentia enim adjecta conſeqventibus, dant rationē $\frac{2}{3}$. Alter vero Pæan, qvem vulgo qvartum vocant, conti-

net

net dactylum & Trochæum ſeu rationem $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{1}$ adeoque eſt ἡμιόλιος. Adjecta enim antecedentia antecedentibus, & conſequentia conſequentibus dant rationem $\frac{3}{2}$. Nec tamen hæc terminorum conjunctio compoſitio appellatur Ariſtoteli, neque proprie loqvendo compoſitio eſt. Etenim una partium eſt major toto: ratio nempe dupla eſt major ratione ſeſqvialtera, adeoque trochæus major qvam Pæan quartus: qvod eſt perabſurdum. Unicus ergo modus componendi rationes totas perfectè, antecedentia nempe cum antecedentibus, & conſeqventia cum conſequentibus, fit per multiplicationem, qvando nempe antecedens cum antecedente, & conſequens cum conſequente multiplicatur, qvi qvidem qvatenus ad lineas pertinet, ab Euclide propoſitus eſt libro VI. Elementorum propoſitione XXIII. ubi demonſtrat æqviangula parallelogramma, rationem invicem habere ex lateribus conjunctā. Nempe ſi datæ fuerint qvæcunque rationes exceſſûs in lineis, ſiue effabiles, ſive ineffabiles, parallegrammum rectangulū ex antecedentibus terminis conſtructum, ad parallelogrammum rectangulum ex conſequentibus terminis, habebit rationem compoſitam ex his binis rationibus.

Sint enim datæ duæ rationes exceſſûs AB. ad BC. & BD. ad BE. conſtituatur ex AB. & BD. antecedentibus terminis parallelogrammum rectangulum; & aliud ex conſequentibus BC. & BE. Quoniam ergo hæc bina

"Εχελαι δὲ τῶν λόγων τέτων ὁ ἡμιόλιος. ἕτος δὲ ἐστὶν ὁ παιάν. *Ex rhythmis vero Herous grandis & dictioni accommodatus & Harmoniæ indigens. Jambus vero ipſa eſt elocutio multitudinis Trochæus autē magis ſaltationi conveniens. Relinqvitur Pæan, quo uſi ſunt incipientes à Thraſymacho. Non potuerunt vero dicere quinam eſſet. Tertius autem eſt Pæan, & continet jam dictos. Eſt enim ut tria ad duo illorum autem unus eſt, ut 1. ad 1., alter ut duo ad unum. Has vero rationes continet ſeſqvialtera, quæ eſt Pæan.* Porro indicat, de quo Pæane verba faciat. duos enim Pæanes contrarios dicit. *Unus enim eſt* ὃ ἄρχει μὲν ἡ μακρὰ, τελευτῶσι δὲ τρεῖς βραχεῖαι, ἕτερος δὲ ἐξ ἐναντίοις, ὃ βραχεῖαι ἄρχουσι τρεῖς, ἡ δὲ μακρὰ τελευταία. *qvi incipit à longa, terminatur tribus brevibus* (cujus ſignum in Poeticis eſt *-vvv*) *alter vero ex contrariis incipit tribus qvidem brevibus, una longa.* (cujus ſignum eſt in Poeticis *vvv-*) Herous ſeu dactylus componitur ex una longa, duabus breuibus. una autem longa æquatur binis brevibus. ergo ratio dactyli eſt 2. ad 2. ſeu 1. ad 1. Jambus vero componitur ex brevi & longa *v-*, hoc eſt ex tribus brevibus, eſtq; ut unum ad duo. Trochæus autem ex longa & brevi, eſtq; duo ad unum. Unus ergo Pæan componitut ex dactylo & jambo, vel ut terminum Ariſtotelis retineamus, continet dactylum & jambum, ſeu rationem æqvalitatis & ſubduplam $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$, unde oritur ratio ſubſeſqvialtera. antecedentia enim adjecta conſeqventibus, dant rationē $\frac{2}{3}$. Alter vero Pæan, qvem vulgo qvartum vocant, conti-

net

net dactylum & Trochæum ſeu rationem $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{1}$ adeoque eſt ἡμιόλιος. Adjecta enim antecedentia antecedentibus, & conſequentia conſequentibus dant rationem $\frac{3}{2}$. Nec tamen hæc terminorum conjunctio compoſitio appellatur Ariſtoteli, neque proprie loqvendo compoſitio eſt. Etenim una partium eſt major toto: ratio nempe dupla eſt major ratione ſeſqvialtera, adeoque trochæus major qvam Pæan quartus: qvod eſt perabſurdum. Unicus ergo modus componendi rationes totas perfectè, antecedentia nempe cum antecedentibus, & conſeqventia cum conſequentibus, fit per multiplicationem, qvando nempe antecedens cum antecedente, & conſequens cum conſequente multiplicatur, qvi qvidem qvatenus ad lineas pertinet, ab Euclide propoſitus eſt libro VI. Elementorum propoſitione XXIII. ubi demonſtrat æqviangula parallelogramma, rationem invicem habere ex lateribus conjunctā. Nempe ſi datæ fuerint qvæcunque rationes exceſſûs in lineis, ſiue effabiles, ſive ineffabiles, parallegrammum rectangulū ex antecedentibus terminis conſtructum, ad parallelogrammum rectangulum ex conſequentibus terminis, habebit rationem compoſitam ex his binis rationibus.

Sint enim datæ duæ rationes exceſſûs AB. ad BC. & BD. ad BE. conſtituatur ex AB. & BD. antecedentibus terminis parallelogrammum rectangulum; & aliud ex conſequentibus BC. & BE. Quoniam ergo hæc bina

Compoſitæ vero hæ rationes, dant rationem omnium rotarum ad totam aquarum molem ſingulis minutis $\frac{16}{20000}$ ſeu $\frac{1}{1250}$. Una ergo hora dabit 60 circumgyrationes, eritque ratio $\frac{60}{1250}$ ſeu $\frac{6}{125}$. Horis ergo 20. & 50′. totus lacus evacuabitur. In his ergo aliisq; plurimis exemplis hujus generis, hæc rationis compoſitio locum habet. Si enim tum per multiplicationem progredi vellem, nihil efficerem. Hoc ergo modo ex ratione $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$ compoſita dici poteſt ratio quintupla, quamvis compoſitio hæc valde ſit imperfecta, ut antea indicatum: cum non totæ rationes, ſed tantum termini earum antecedentes componantur.

Integra autem & perfecta compoſitio rationum eſt, quando duarũ rationũ exceſſûs ambo termini antecedens cum antecedente, & conſequens cum conſequente invicem conjunguntur. Talem vero compoſitionem additione fieri non poſſe, Geometræ ſtatim deprehenderunt. Etenim cum omnis compoſitio, rem compoſitam auctiorem & majorem reddere debeat, quam antea fuit: ergo cum id additione amborum terminorum invicem non ſemper fiat; ſed in omnibus quidem æqualibus rationibus totum ſit æquale ſingulis partium unde componitur, in aliis vero aliquando minus: ſequitur talem additionem compoſitionem appellari non debere. Si enim rationem triplam cum tripla ratione per additionem antecedentium invicem, & conſequentium invicem componere voluerim, ratio erit tripla. Habeat enim in figura

gura No. 2. AB. ad CD. rationem triplam; EF. ad GH. rationem triplam, dico, ſi AB. jungatur ipſi EF. & CD ipſi GH. tum totam ABEF. ad totam CDGH. habere rationem triplam. Si enim AB. fuerit 6. pedum, CD. erit 2. pedum. & ſi EF. fuerit 9. pedum GH. erit 3. pedum. Jungantur AB. & EF. tota AB EF. erit pedum 15. jungantur EFGH. tota EFGH. erit pedum 5. At 15. eſt triplum 5., ſicut 9. eſt triplum 3., & 6. triplum binarii. unde ratio ubique eadem, nempe tripla. Quod ſi ratio minor ratione æqvalitatis componatur: hoc modo cum ratione quacunq; exceſſus, tum totum minus erit ſua parte. ut ſi ratio $\frac{3}{1}$ ſeu $\frac{6}{2}$ componatur cum ratione $\frac{1}{2}$ prodit ratio $\frac{7}{4}$ At ratio $\frac{12}{4}$ ſeu $\frac{3}{1}$ eſt major ratione $\frac{7}{4}$. Liquet ergo ex his, rationes per additionem amborum terminorum antecedentium invicem & conſequentium invicem componi non poſſe, neque illam compoſitionem ullo modo eſſe legitimam, ſed potius diviſionē aliquam eſſe, de qvibus in ſequentibus. Scio quidem Ariſtotelem Rhetoricorum lib. III. c. VIII. hujus compoſitionis aliquam feciſſe mentionem. Verba qvatenus huc ſpectant adſcribam, Τῶν δὲ ῥυθμῶν ὁ μὲν ἡρῷος σεμνὸς καὶ λεκτικὸς καὶ ἁρμονίας δεόμενος. ὁ δὲ ἴαμβος αὐτή δὲ ἐστιν ἡ λέξις ἡ τῶν πολλῶν. ὁ δὲ τροχαῖος κορδακικώτερος. λείπεται δὲ παιὰν ᾧ ἐχρῶντο μὲν ἀπὸ Θρασυμάχου ἀρξάμενοι, οὐκ εἶχον δὲ λέγειν τίς ἦν. Ἔστι δὲ τρίτος ὁ παιὰν καὶ ἐχόμενος τῶν εἰρημένων. τρία γὰρ πρὸς δύο ἐστίν. Ἐκείνων δὲ, ὁ μὲν ἓν πρὸς ἕν, ὁ δὲ δύο πρὸς ἕν.

neţ dactylum & Trochæum ſeu rationem $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{1}$ adeoque eſt ἡμιόλιος. Adjecta enim antecedentia antecedentibus, & conſequentia conſequentibus dant rationem $\frac{3}{2}$. Nec tamen hæc terminorum conjunctio compoſitio appellatur Ariſtoteli, neque proprie loqvendo compoſitio eſt. Etenim una partium eſt major toto: ratio nempe dupla eſt major ratione ſeſqvialtera, adeoque trochæus major qvam Pæan quartus: qvod eſt perabſurdum. Unicus ergo modus componendi rationes totas perfectè, antecedentia nempe cum antecedentibus, & conſeqventia cum conſequentibus, fit per multiplicationem, qvando nempe antecedens cum antecedente, & conſequens cum conſequente multiplicatur, qvi qvidem qvatenus ad lineas pertinet, ab Euclide propoſitus eſt libro VI. Elementorum propoſitione XXIII. ubi demonſtrat æqviangula parallelogramma, rationem invicem habere ex lateribus conjunctā. Nempe ſi datæ fuerint qværcunque rationes exceſſûs in lineis, ſiue effabiles, ſive ineffabiles, parallegrammum rectangulū ex antecedentibus terminis conſtructum, ad parallelogrammum rectangulum ex conſequentibus terminis, habebit rationem compoſitam ex his binis rationibus.

Sint enim datæ duæ rationes exceſſûs AB. ad BC. & BD. ad BE. conſtituatur ex AB. & BD. antecedentibus terminis parallelogrammum rectangulum; & aliud ex conſequentibus BC. & BE. Quoniam ergo hæc bina

Digitized by Google

na parallelogramma ſunt æquiangula, ergo habent rationem invicem conjunctam ex lateribus per XXIII. Propoſitionem. adeoq; erit ut AB. ad BC. & DB. ad BE. ſic parallelogrammum AD. ad parallelogrammum CE. Neque ſane aliter eſſe poteſt. Cum enim ambo termini utriuſq; rationis invicem multiplicentur: ipſæ qvoq; rationes invicem ſunt multiplicatæ. omnis autem talis multiplicatio in rationibus exceſſus eſt compoſitio, ut antea dictũ. Neque in rationibus alia compoſitio perfecta eſt, prҽter illã, quæ fit per multiplicationem. Duæ autem lineæ rectæ in ſe ductæ, hoc eſt multiplicatæ invicem generant parallelogrammum. Ergo parallelogramma æqviangula ex antecedentibus & conſequentibus exſtructa exhibent rationem compoſitam ex binis aliis rationibus.

Atq; hoc qvidem in numeris non minus clarum perſpicitur. Etenim ſi duæ rationes triplæ componantur invicem, oritur ratio noncupla ut $\frac{3}{1}\frac{3}{1}$ dant $\frac{9}{1}$. Antecedentibus enim invicem, & conſeqventibus in ſe ductis oritur ratio $\frac{9}{1}$.

Liqvet ergo eandem & in Geometricis & Arithmeticis rationum compoſitionem eſſe. Sicut enim in Arithmeticis ambo antecedentia in ſe ducta ſeu invicem multiplicata, dant antecedens compoſitæ rationis: & conſequens ſimiliter ductum in conſeqvens, dat compoſitæ rationis conſequens, ita etiam in Geometricis ambo antecedentia, ſeu ambæ antecedentes magnitudines, qvæ certis lineis indicantur, in ſe ductæ dant par-

Digitized by Google

parrallelogrammum, qvod qvidem ad parallelogrammum ex binis qvibuſcunq; lineis, qvæ conſequentes terminos ſeu magnitudines repræſentant, conſtructum, rationem habet ex lateribus compoſitam.

Quoniam vero neceſſarium eſt, rationes haſce compoſitas non tantum in parallelogrammis, ſed etiam in rectis lineis exhibere; methodum hujus rei in ſeqventibus proponam, eadem multiplicatione, per parallelogramma, ſemper retenta, ut benevolus lector pervideat, quã bene modus componendi rationes, tam Geometrice qvam Arithmetice invicem conveniat.

Hanc vero compoſitionem rationum, qvæ ita per antecedentium & conſeqventium terminorum mutuam multiplicationem peragitur, omnino genuinam eſſe, atque in ipſa natura fundamentum habere, ex Harmonicis diſcimus. Cum enim Harmonia diateſſaron ex qvatuor tonis componatur, qvorum primus ad ſecundumeſt in ratione ſeſqvioctava, tertius vero ad qvartum, ut 256. ad 243: ergo ratio quæ dat diateſſaron, hoc eſt ratio ſeſqvitertia, componitur ex hiſce tribus rationibus $\frac{9}{8}$, $\frac{9}{8}$ & $\frac{256}{243}$. Quod etiam hac compoſitione verum eſſe deprehenditur. Ratio enim $\frac{9}{8}$ ſeu ſeſquioctava compoſita cum ratione ſeſqvioctava, dat rationem $\frac{81}{64}$. Porro ratio $\frac{256}{243}$ compoſita cum ratione $\frac{81}{64}$, dat rationem $\frac{20736}{15552}$ ſeu $\frac{4}{3}$ hoc eſt ἐπίτριτον ſeſqvitertiam. Maximus enim communis diviſor 5184. ſecat antecedentem terminum 20736.

Digitized by Google

in 4. partes & conſequentem 15552. in tres. adeoq; ratio 20736. ad 15552. eſt ratio ſeſquitertia, ſeu in minimis numeris $\frac{4}{3}$. At componitur ratio 20736. ad 15552. hoc eſt $\frac{4}{3}$ ex ratione 81. ad 64. & 256. ad 243. ratio autem 81. ad 64. componitur ex binis ſeſqvioctavis, adeoque ratio $\frac{3}{4}$ ſeu ſeſqvitertia, qvæ dat harmoniam diateſſaron componitur ex binis ἐπογδόοις ſeſqvioctavis & limmate, cujus ratio eſt, ut numerus ad numerum 256. ad 243. Hæc eſt illa harmonia universi, juxta qvam omnium rerum compoſitio eſt ordinata, qvam pulcherrimis verbis deſcribit Plato in Timæo, & ex eo Cicero in libro de Univerſo, de qva re poſtea plenius, ubi de analogia ſpeciatim erit agendum. Ita ergo hæc rationum compoſitio qvæ fit per multiplicationem antecedentium terminorum inter ſe, & conſeqventium inter ſe, in ipſa natura fundamentum habet.

CAP. VI.

Hactenus qvidem compoſitionem rationum conſideravimus: Seqvitur diviſio, qvæ varia: non ſecus quam ipſa compoſitio. Etenim vel totalis diviſio eſt, vel partialis. Totalis eſt, quando magnitudo à magnitudine, vel numerus à numero, vel denique pondus à pondere aufertur toties, qvoties fieri poteſt, ita ut nihil remaneat. Partialis autem, qvando ſemel tantum, ita ut aliqvid remaneat.. Prior κατ' ἐξοχὴν diviſio dicitur, poſterior ſubtractio. Sic ſi mag-

ſi magnitudo 6. pedum auferatur à magnitudine 18. pedum ſemel, remanent 12. pedes. At ſi dividatur per 6 pedes, nihil qvidem remanet non diviſum, totum vero diviſum eſt 3. pedum. In diviſione ergo proprie ſic dictâ, tria veniunt notanda, dividendum, dividens & diviſum. Ut in priori exemplo magnitudo 18. pedum eſt dividendum, magnitudo 6. pedum eſt dividens, & magnitudo 3. pedum eſt diviſum, ſive id qvod fit ex diviſione. Quod ipſum in numeris & ponderibus eodem modo ſe habet. Eſt autem diviſio proprie dicta, vel perfecta, vel imperfecta. Perfecta, qvando poſt diviſionem nihil remanet non diviſum. Imperfecta, quando poſt diviſionem aliquid remanet non diviſum. In priori exemplo, magnitudo 6. pedum ita dividit magnitudinem 18. pedum ut peracta diviſione nihil remaneat non diviſum. Si vero diagonalis qvadrati alicujus dividatur per latus alterius qvadrati, quod prioris ſit ſubſexdecuplum, adeoque baſis baſeos ſubqvadrupla: erit qvidem diviſio illa in qvinque partes, ſed non perfecta. Dividit enim baſis diagonalem iſtam in qvinque partes, ita tamen ut aliquid remaneat non diviſum, imo qvod neque ullo modo dividi poteſt à baſi; cum earum ratio mutua ſit ineffabilis, qvamuis potentia ſit effabilis.

Quoniam vero hæc rationum diviſio magno nobis uſui poſtea ſit: neceſſarium arbitror eam accuratius explicare, ſingulaſque ipſius affectiones diligentius

Digitized by Google

conſiderare. Qvod ut fiat, antea diviſio omnium quantitatum conſideranda erit, tam in numeris, qvam magnitudinibus ac ponderibus.

Dico ergo primùm, diviſionem eſſe duarum quantitatum homogenearum conjunctionem mutuam, ex qua alia fit quantitas, vel una priorum, vel utraque minor.

Per quantitates homogeneas intelligo numeros, cum numeris, lineas cum lineis, pondera cum ponderibus conjungi. Per conjunctionem vero intelligo multiplicationem. Nulla enim diviſio ſine multiplicatione. Si enim magnitudo 20. pedum per magnitudinem 4. pedũ erit dividenda, utique minor qvinquies multiplicanda, ut totum in qvinque partes dividat. Quoniam vero in omnibus rationibus effabilibus, σχέσις ſemper ſit totius ad partes, vel partis aut partium ad totum: utique diviſio rationum effabilium ex diviſione harum rerum optime intelligetur. Antea enim indicavimus omnes rationes effabiles, eſſe ut numerum ad numerum. Ratio autem numeri ad numerum eſt, ut tot partes unius integri, ad partes qvotcunque alterius integri. Sic magnitudo 256. partium ad magnitudinem 243. partium habet rationem quam numerus ad numerum: hoc eſt ut 256. partes ad 243. partes. Atque id adeo in omnibus rationibus effabilibus verum eſt; ut nulla plane ratio ſit effabilis, niſi quæ numero explicari poſſit. Ut ergo doctrinam diviſionis rationum intelligamus, in partium

Digitized by Google

tium natura primum addiſcenda erit. Atq; ut in priori exemplo maneamus, ſit magnitudo AB. in figu.num. 3. partium 256. talium, qualium magnitudo CD. in eadem figura eſt partium 243. Ratio ergo AB. ad CD. eſt 256. ad 243. Secetur AB. bifariam in E. ratio ergo AE. ad AB. eſt 128. ad 256., ſeu 1. ad 2. Etenim AE. continet partes 128. tales, quales AB habet 256. Eſt vero numerus 128. dimidius numeri 256. Erit ergo ratio harum partium, ut 1. ad 2. Ratio autem AE. ad CD. erit 128. ad 243. In minoribus enim numeris non datur. magnitudo autem AE. partes habet 128. tales, qvales magnitudo CD. partes habet 243. Secetur porro magnitudo CD. in tres partes, & ſit triens hujus CF. erit ergo ratio CF. ad CD., ut 81. ad 243., ſeu 1. ad 3. Cum enim CF. ſit triens ipſius CD., ergo qvalium CD. habet 243. partes, talium CF. habebit 81. partes. ut ſi CD. eſſet pedum 243. eſſet CF. triens hujus pedum 81. cum 81. ſint tertia pars 243. Eſt ergo ratio CF. ad CD. ſubtripla, ſeu $\frac{1}{3}$: vel retentis prioribus numeris ut 81. ad 243. Ad magnitudinem vero AB. eſſet ut 81. ad 256. & ad magnitudinem AE. ut 81. ad 128. Si ergo magnitudinem AE., qvæ habet centum viginti octo ducenteſimas qvinqvageſimas ſextas partes, ita dividere cuperem, ut diviſum eſſet, ſicut CF. ad CD. ſeu haberet octuaginta unam ducenteſimas qvadrageſimas tertias partes: divido ſingulas partes ducenteſimas qvinqvageſimas ſextas in partes ducentas qvadraginta

tres, hoc eſt multiplico 256. per 243. prodeunt 62208. Adeoq; tota AB. habet ſexagies bis mille ducentas & octo partes ducenteſimas qvadrageſimas tertias: hoc eſt cum ſingulæ partes ducenteſimæ qvinqvageſimæ ſextæ ipſius AB. ſectæ fuerint in partes ducentas quadraginta tres, erit tota AB. ſecta in partes tales 62208. Adeoque cum 256. partes ſecentur in 62208. partes; utique 128. ſecabuntur in 31104. ejuſdem menſuræ partes. Ut autem partem habeamus, qvæ ſit ad 128. hoc eſt ad 31104. ut 81. ad 243. erit ut 243. ad 81. ſic 31104. ad qvartum quæſitum, ſeu ad 10368. Hoc eſt 10368. ſe habet ad 31104. ſeu 128. partes ducenteſimas qvinqvageſimas ſextas magnitudinis AB. ut 81. ad 243. Quæ qvidem portio, etiam ex ſola multiplicatione antecedentium cognoſcitur. 81. ducta in 128. dant 10368. Eritque ratio partis hujus datæ, quæ ad 128. ſe habet, ut 81. ad 243., ad totam magnitudinem AB. ſeu 256., ut 10368. ad 62208. Adeoque magnitudo qvæ prius eo modo diviſa erat, ut pars ad totum eſſet ut 128. ad 256. nunc iterum ſecundum eandem partem ita diviſa eſt, ut pars poſterior ad priorem ſit ut 81. ad 243. ad totum autem ut 10368. ad 62208. ſeu reductis numeris ad minima, ut 1. ad 6.

Idipſum pluribus exemplis illuſtrare velim, ut eo melius diviſionis naturam perſpiciamus. Sit magnitudo AB, alia magnitudo CD, qvæ qvidem ſi invicem debeant eſſe commenſurabiles, tum CD. bifariam

am erit ſecanda. Continet enim AB totam in ſe CD. ter, & partem præterea ipſius dimidiam; hoc eſt, habet partes 7. tales, qvales CD. habet duas. Optarem tota AB. biſariam ſecta in E. omnes tres magnitudines AB. AE. & CD. commenſurabiles efficere, ita ut eadem menſura menſurari poſſent. Divido ſingulas partes ſeptimas ipſius AB biſariam, hoc eſt, multiplico 7. per binarium, prodeunt 14. Adeoque tota AB. talium eſt 14, qvalium AE. eſt 7. Divido qvoque ſingulas partes ipſius CD. biſariam, hoc eſt multiplico duo per duo, prodeunt 4. Cum ergo AB. nunc ſit 14. partium talium, qvalium CD. eſt qvatuor; erit AE. 7. talium, qualium CD. eſt qvatuor. Atq; hoc facillime ipſi rationum compoſitioni applicatur. Ratio enim AB. ad CD. eſt eadem quæ partium 7. ad 2. Ratio autem AE. ad AB eſt ſemiſſis ad integrum, hoc eſt 1. ad 2. Quæro rationem AE. ad CD. qvam antea deprehendi eſſe, ut 7. partes ad qvatuor partes. Divido rationem 7. ad 2, per rationem 1. ad 2. & qvidem multiplicando antecedentia invicem; & conſeqventia invicem: prodit ratio 7. ad 4. Etenim in rationibus $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{2}$ ſemel ſeptem ſunt ſeptem, bis bina quatuor: prodit ratio $\frac{7}{4}$. Dixi autem in omni diviſione, diviſum vel utroque terminorũ ſingillatim ſumpto minus eſſe, vel alterutro. Etenim ſi 20. dividantur per qvatuor, diviſum erit 5. At quinque minor qvidem eſt dividendo, ſed major diviſore quaternario. Si vero 20. dividantur per 10, diviſum erit duo: & tum diviſum

ſum minus eſt & dividendo, & diviſore. Quod ipſum in rationum diviſione locum habet. Si enim ratio exceſſus dividatur per rationem defectus, diviſum minus qvidem eſt ratione exceſſus, ſed majus ratione defectus. Ut in antecedenti ſchemate, ratio 7. ad 4. eſt major quidem ratione $\frac{1}{4}$, ſed minor ratione 7. ad 2. ſeu 14. ad 4. Verum de his plenius ubi ad rationes majores & minores ventum fuerit. Nunc tantum naturam diviſionis indicaſſe voluimus.

Verum pluribus hæc exemplis ſunt illuſtranda. Sit magnitudo AB. 7. partium talium, qualium CD. ſit 2. Secetur AB. in AE. ita ut tota AB, tres partes tales habeat, quales AE. majus ſegmentum habet duas; & minus BE. unam. Velim ſcire qua communi menſura majus ſegmentum & CD. magnitudo menſurantur. Seco totam in tres partes, & ut conveniant invicem particulæ ipſius CD. & AB: ſeco ſingulas partes ſeptimas AB. & ſingulas partes ſecundas CD. trifariam. adeoque tota AB. habet 21. partes tales, quales CD. habet 6. Majus ergo ſegmentum habebit 14. tales, quales AB. habet 21: hoc eſt quales CD habet 6. Id autem ipſum breviſſima methodo inveſtigatur, multiplicando 2. per 7. & tria per duo. Nam & AB. tum debito modo ſecta eſt: & ſegmentum ejus factum eſt commenſurabile ipſi CD. Eſt vero ratio AB. ad CD. ut partes 7. ad 2. ratio autem AE. ad AB. eſt ut duæ partes ad tres partes, ſeu ut 2. ad 3. Multiplicentur antecedentia cum antecedentibus, & conſeqventia

cum

cum antecedentibus, & conſequentia cum conſequentibus, erit bis ſeptena 14: ter bina 6. datur ergo ratio majoris ſegmenti ad CD. ut 14. partes ad 6. vel 7. ad 3.

Compoſitio ergo vera & perfecta rationum & earundem perfecta diviſio, eodem plane modo fiunt per multiplicationem. Tantum inter ambas hoc diſcrimen eſt, quod tertium ſeu productum illic augeatur, majuſque ſit utravis rationum; heic vero minuatur: & vel utraque rationum minus ſit, vel una. Et ne quis exiſtimet hanc diviſionem jure appellari non poſſe; demonſtro, in diviſionibus qua partes tota, juxta certam menſuram, vel partes partes ſecant, hanc eandem dividendi methodum locum habere. Si enim duæ ſeptimæ partes alicujus magnitudinis in quatuor quinque partes ſint ſecandæ, hoc eſt AE qvæ habet duas partes tales, quales AB habet 7. ſecanda erit in ſingulis partibus, ita ut qvæuis pars ſecta ſe habeat ad quamvis partem ſecundam ipſius AE. vel ſeptimam AB. ut CF. ad CD. hoc eſt ut quatuor ad quinque. Seco ſingulas partes in qvinque. Adeoque tota AB. ſecta eſt in partes 35. tota autem AE in partes 10. Ut vero quatuor ad quinque, ſic 8. ad decem. Adeoque octo decimæ partes ipſius AE. erunt octo triceſimæ quintæ partes ipſius AB. Idipſum methodo ſuperius tradita facillime inveſtigatur. Partes enim ſunt $\frac{2}{7}$ & $\frac{4}{5}$ quæ conjungantur invicem multiplicando ſuperiora cum ſuperioribus (Græci ſuperiores numeros vo-

cant προλόγους inferiores ὑπολόγους) prodit numerus $\frac{8}{25}$. Idipſum adeo in omnibus partium diviſionibus contingit, qvæ per alias partes dividuntur. Partem autem voco qvicquid ab alio exceditur, vel una, vel pluribus partibus. ſic $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ ſunt partes. $\frac{7}{2}$ autem partis partiumve nomine non veniunt: cum totum ſit, continens in ſe tot partes tales alterius. In omnibus ergo magnitudinibus commenſurabilibus partes dicuntur quando antecedens minus eſt conſequente. Totũ vero, quando antecedens majus eſt conſequente. Ut ergo ſemel dicam, qvando tota cum partibus, vel partes cum partibus hoc modo conjunguntur, diviſio fieri dicitur. Etenim quod ex hac conjunctione fit, minus eſt vel uno vel alterutro terminorum. At compoſitionem id vocare, quando id quod fit, minus eſt eo ex quo fit, id vero perabſurdum eſt. Si enim res componuntur, augentur: & compoſitum erit totum; ea vero quæ componunt, partes. Totum autem majus eſſe partibus ſuis haud dubium.

Quando ergo ratio exceſſus conjungitur cum ratione defectus, ratio exceſſus per rationẽ defectus diviſa eſt. & illa ratio quæ inde oritur, ratio diuiſa appellatur; ſaltem ita appellari jure debet: quandoquidem ſemper minor ſit quam ratio exceſſûs primo loco poſita. Eodem modo, quando ratio defectûs cum ratione defectus per multiplicationem conjungitur; major ratio à minore diuiditur: & ea ratio quæ ex hac conjunctione oritur, minor eſt utraque, adeoque diviſum. Quod

in

in ſequentibus poſtea plenius demonſtrabimus. Optime ergo Euclides, quando hanc conjunctionem rationum indicare voluit, ſemper uſus eſt voce συγκεῖσθαι conjici aut conjungi; non vero συντίθεσθαι: quod alii forte Græci Mathematici non tam diligenter obſeruauerint: quamvis & certo modo eorum vocabula explicari poſſint: qua de re pluribus poſtea dicendum. Quod ſi quis præfracte contenderit, etiam illam conjunctionem, compoſitionem eſſe dicendam, quæ fit inter rationes exceſſûs & defectûs, vel rationes defectus inuicem: non video quomodo compoſitionem à diviſione ſejunxerit. Etenim compoſitionem eſſe contrariam diviſioni, vix quiſquam negauerit. Neq; ullum arbitror dicturum, diviſionem ullo modo poſſe appellari compoſitionem. At quando duæ magnitudines ita invicem conjunguntur, ut unum productum faciant minus vel utraque earundem magnitudinum, vel una ſaltem: tum diuidit una magnitudo aliam, eandemque imminuit, non vero auget. Diuiſio ergo rationum ex diviſione magnitudinum optime intelligitur, ſicut & illarum compoſitio, ex harũ compoſitione. Quoniam vero hæc accurate in rationibus demonſtrari nequeunt, niſi antea rationes æquales & inæquales fuerint explicatæ: harum naturam jam paucis indicabimns, cum unum per aliud eo melius & facilius intelligatur.

Digitized by Google

CAP. VII.

Æquales rationes dicuntur, quæ ſe inuicem nec majores ſunt, nec minores. Ratio autem altera ratione major dicitur, quæ æqualem excedit: Minor vero quæ ab æquali ratione deficit. Sicut autem quantitates cum quantitatibus comparatæ, vel æquantur inuicem, vel ſunt inæquales, ita ut una quidem aliam excedat, altera vero excedatur: ita etiam rationes invicem comparatæ, uel æquales ſunt, uel inæquales. Æquales rationes ſunt, quarum quantitas eſt æqualis: ut dupla ratio duplæ; tripla, triplæ; ſextupla, ſextuplæ; ſeſquialtera, ſeſquialteræ; atq; ſic in omnibus rationibus exceſſus: tum ſubdupla, ſubduplæ; ſubtripla, ſubtriplæ; ſubquadrupla, ſubquadruplæ; ſubſeſquialtera, ſubſeſquialteræ: atque ſic in infinitum. Ex æqualium vero rationum natura, inæqualium rationum cognitio dependet. Sunt enim inæquales rationes, quarum quantitates invicem comparatæ ſunt inæquales; & cujus quantitas major, illa ratio major eſt; cujus vero quantitas minor, illa ratio minor. Quantitates autem, per æqualitatem menſurantur. Si enim magnitudo quæcunque cum alia quacunque magnitudine comparetur, quarum una aliam excedit; ſumatur in majori magnitudine alia, minori æqualis, dabitur ſtatim exceſſus majoris. Ita etiam in rationum collatione, ſi una conferatur cum ratione quæ alteri eſt ęqualis; ſtatim qvidem apparebit, an altera ratio vel major ſit, vel minor, vel æqualis. Quærendum

rendum ergo primo, qua methodo rationes æquales inveſtigentur. Et in magnitudinibus quidẽ una ac ſimpliciſſima methodus eſt, nempe per multiplicationem in rationibus exceſſus, & diviſionem in rationibus defectus. Eſt enim multiplicatio, ut unitas ad multiplicantem, ſic multiplicandus ad multiplum ſeu quartum qvæſitum. Ut verbi gratia in numeris, ſi velim multiplicare 128. per 4. erit ut 1. ad 4, ſic 128. ad 512. Contra diviſio eſt, ut diviſor ad unitatem, ſic dividendus ad diviſum, ſeu quartum qvæſitum, ut ſi 512 dividendus ſit per 128. erit ut 128 ad 1, ſic 512. ad 4. Quod autem unitas in numeris, id minor duarum magnitudinum eſt in magnitudinibus. Quando enim quæro aliquam magnitudinem qvę toties aliam in ſe contineat magnitudinem, qvoties alia magnitudo aliam, hoc eſt ut clarius dicam, qvando datis tribus magnitudinibus, quarum prima major eſt quam ſecunda; qværo autem qvartam, qvæ juxta eandem menſuram tertiæ excedat tertiam, juxta qvam prima excedit ſecundam: conſtructis triangulis ſimilibus, ut in figu. num. V. dico ut ſecunda ad primam, ſic tertia ad qvartam. Sit enim AB. 7. pedum: BC. 1. DE. 9 pedum: dico, ut ſe habet BC ad AB. ſic DE. ad qvartum quæſitum.

ſeu ut 1. ad 7, ſic 9. ad 63.

Quod qvidem ſola multiplicatione inveſtigatur. In lineis autem eſt, ut BC. ad AB, ſic DE. ad EA. At q; hoc adeo in omni multiplicatione verum eſt. Si e-

nim BA. fuerit dupla ipſius EB. etiam EA. erit dupla ipſius DE. & ſi BA. ſeſquialtera ipſius BC, etiam EA. erit ſeſqnialtera ipſius ED: ac demum juxta quamcunque rationem, AB. major fuerit magnitudine BC. juxta eandem rationem magnitudo AE major erit magnitudine DE.

Omnis ergo multiplicatio in magnitudinibus hoc modo fit. Si datis tribus magnitudinibus, qvarum prior major ſit ſecunda, qværo autem qvartam, quæ juxta eandem rationem & multiplicationem ſit major tertia, qua prior major eſt ſecunda: dico, ut ſecunda minor ad primam majorem, ſic tertia ad qvartam. Adeoque quando datam qvacunqe magnitudinem ita augere velim, ut aucta ſeu compoſita ad ſimplicem habeat eandem in exceſſu rationem, quam alia magnitudo major ad aliam minorem, conſtructo triangulo juxta figuram num. V. dico ut ſecunda minor ad primam majorem, ſic tertia ad quartam. Adeoq; habeo magnitudinem auctam ſeu compoſitam juxta illam rationem, quam habet prima ad ſecundam.

Si vero datis tribus magnitudinibus, qvarum prima minor eſt qvam ſecunda, vellem autem tertiam ita dividere, ut portio ad totam haberet eandem rationem quam prima ad ſecundam: exſtruo rurſum triangula ſimilia bina, ut in figura num V. atque inde concludo, ut ſecunda ſeu major magnitudo ad primam minorem, ſic tertia ad quartam, ſeu ad diviſum. Ut in figura numero V. ſi magnitudo AB. eſſet triens magni-

Digitized by Google

magnitudinis AE, qværerem vero trientem ipſius DE, conſtructis ut illic triangulis æqviangulis dico ut EA. major magnitudo ad BA. minorem; ſic DE. ad CB. Adeoque DE. magnitudo diviſa eſt in tres partes, & CB ſe habet ad DE. ut BA. ad EA.

Multiplicatio ergo& diviſio eodem plane modo perficitur, tantū hoc diſcrimine retento, qvod in multiplicatione factū ſe habeat ad tertium, ut majus ad minus: in diviſione vero, factum ſeu diviſum ſe habeat ad tertium, ut minus ad majus. Operatio quoque in multiplicatione diverſa eſt ab operatione in diviſione. Illic enim pro inveniendo qvæſito eſt, ut minor ad majorem terminum, ſic tertius terminus ad quæſitum. In diviſione autem pro inveniendo diviſo dicimus, ut major terminus ad minorem, ſic tertius ad qvæſitum. Quod utrumque ex priori exemplo liquet. In multiplicatione enim DE. pro invenienda EA. multipla ipſius, erat, ut CB minor terminus ad AB maiorem, ſic DE. ad EA. Factum autem per hanc multiplicationem, nempe EA ad ſuum terminum DE, ſe habet ut major terminus BA ad CB. terminum minorem. In diviſione autem pro invenienda CB. parte ipſius DE. eſt ut EB. major terminus ad BA minorem terminum; ſic DE. ad CB. Diviſum autem CB. ſe habet ad totum DE. ut AB. minor terminus ad AE. majorem terminum.

Quando ergo datis tribus terminis, qværitur quartus, qvi ad tertium terminum eam habeat rationem quam primus ad ſecundum: videndum ſtatim eſt, an pri-

primus terminus ſit major ſecundo, vel minor. Si major eſt ſecundo, hoc eſt, ſi fuerit ratio exceſſus, tum quartus erit major tertio: adeoque tertius terminus augendus eſt ſeu multiplicandus, fietque ut minor ad majorem, ſic tertius ad quartum. Tum enim qvartus ad tertiũ eandem habebit rationem qvam primus ad ſecundũ. Atque hoc modo in omnibus rationibus exceſſus quęritur ratio æqvalis per multiplicationem. Quod ſi primus terminus ſecundo minor fuerit, tertius terminus dividendus erit, dicendumq; ut major ad minorem, ſic tertius ad qvæſitum. Ita enim qvartus terminus eandem habebit rationem ad tertium qvam primus ad ſecundum. Talique modo ratio æqvalis quæritur cuicunq; rationi defectus. Omnis ergo operatio per qvam qvartus terminus ita qværitur, ut dicatur, ut minor terminus ad majorem, ſic tertius ad qvæſitum, eſt multiplicatio. In qva autem qvartus ita qværitur ut dicatur, ut major terminus ad minorem, ſic tertius ad quæſitum vocatur diviſio. In multiplicatione enim eſt, ut 1. ad 5. ſic 6. ad 30. qvinqvies enim ſena ſunt triginta. In diviſione autem eſt ut 5. ad 1. ſic 30. ad 6. qvinqve enim in triginta habeo ſexies. Quod autem unitas in numeris, id inter magnitudines, minor magnitudo ex duabus eſt. Hac ergo methodo cuicunque rationi datæ alia æqvalis ratio conſtituitur: nempe, ſi ratio fuerit exceſſus, tum multiplicando altera ratio acquiritur. Si vero ratio fuerit defectus, tum dividendo æqvalis huic con-

Digitized by Google

conſtituitur. Quam autem nos æqualem rationem dicimus, eam Euclides ſimilem vocat: qvamvis in rationibus inæqvalibus nomina quantitatis retinuerit, vocando unam majorem, & alteram minorem. Ariſtoteles vero eadem appellatione uſus eſt, qva nos. Illi enim ratio æqualis dicitur, qvam nos hoc nomine inſignivimus. Quod vero Theonem Smyrnæum attinet, is ſingularem hac in parte ſententiam habet. Vocat enim rationem æqvalem, qvam nos æqvalitatis dicimus, & qvam ipſemet alibi λόγον ἰσότητος appellat: majorem vero, qvæ nobis ratio exceſſus dicitur Græcis λογος ὑπεροχῆς: oppoſitam vero huic rationem defectûs vocavit λόγον ἐλάττονα ſeu rationem minorem. Locus eſt capite XXII. libri ſecundi ſeu de muſica, Τῶν δὲ λόγων inqvit οἱ μὲν εἰσὶ μείζονες, οἱ δὲ ἐλάττονες, οἱ δὲ ἴσοι. Ὁ μὲν οὖν ἴσος εἷς καὶ ὁ αὐτὸς λόγος, καὶ προηγεῖται πάντων τῶν λόγων καὶ ἔστι στοιχειώδης. Ἴσοι δὲ εἰσὶν οἱ κατὰ τὴν αὐτὴν ἰσότητα ἐξεταζόμενοι πρὸς ἀλλήλους. οἷον ἓν πρὸς ἕν, καὶ δύο πρὸς δύο, καὶ δέκα πρὸς δέκα, καὶ ἑκατὸν πρὸς ἑκατόν. Τῶν δὲ μειζόνων οἱ μὲν πολλαπλάσιοι, οἱ δὲ ἐπιμόριοι, οἱ δὲ οὐδέτεροι. Ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἐλαττόνων, οἱ μὲν ὑποπολλαπλάσιοι, οἱ δὲ ὑπεπιμόριοι, οἱ δὲ οὐδέτεροι. *Rationum aliæ ſunt majores, aliæ minores, aliæ vero æqvales. Æqualis ergo una eſt & eadem, omnesque rationes præcedit, ac elementi vicem habet. Æqvales*

 les

les autem ſunt, quæ eandem inter ſe æqvalitatem habent, ut unum ad unum, duo ad duo, decem ad decem, centum ad centum. Majorum vero rationum aliæ ſunt multiplæ, aliæ ſuperparticulares, aliæ neutræ. Minorum pariter, aliæ ſunt ſubmultiplæ, aliæ ſubſuperparticulares, aliæ neutræ. Ex quibus id ſequi videtur qvod antea indicavi, æqvalem rationem Theoni Smyrnæo appellari, quam nos æqvalitatis dicimus, imo qvam ipſemet plurimis in locis λόγον ἰσότητος appellat. Eqvidem, ſi diceremus numeros ἓν πρὸς ἕν, δύο πρὸς δύο δέκα πρὸς δέκα ἑκατὸν πρὸς ἑκατὸν à Theone tantum notis fuiſſe indicatos, ſcriptumq; α' πρὸς α', καὶ β' πρὸς β', καὶ ι' πρὸς ι'. καὶ ρ' πρὸς ρ'. per que hos numeros qvantitates, intelligendas eſſe non terminorum invicẽ, ſed ipſarum rationum: adeoque integre ſcribendum οἷον ἓν πρὸς ἓν καὶ διπλάσιον πρὸς διπλάσιον, καὶ δεκαπλάσιον πρὸς δεκαπλάσιον, καὶ ἑκατομπλάσιον πρὸς ἑκατομπλάσιον, *ut unũ ad unũ* (ſeu ſimplũ ad ſimplũ) *duplũ ad duplũ, decuplum ad decuplum, centuplum ad centuplum*; facile hæc Theonis verba cum aliorum Geometrarum mente conciliari poſſent. Si enim duæ rationes æqvalitatis invicem comparantur: utrinque eſt ratio unitatis ad unitatem. Ratio autem dupla eſt æqvalis rationi duplæ, & decupla decuplæ, & centupla centuplæ. Id quoque quod de majoribus rationibus ſubjungitur, illas eſſe vel multiplas, vel ſuperparticulares, vel neu-

tras

tras; ſatis commode explicari poſſet: nēpe ut ratio noncupla vel vigecuploſeptupla &c. eſſēt multipla rationis triplæ. illa qvidem dupla vel duplicata, hæc tripla vel triplicata. Sic ratio 81. ad 3. eſt ſeſqvialtera rationis 27. ad 3. & ratio 81. ad 1. eſt ſeſquitertia rationis 27. ad 1. Ratio autem 243. ad 1. collata cum ratione 27. ad 1. neque multipla eſt, neque ſuperparticularis, ſed neutra, & qvidem, juxta priorem methodum eſt ſuperpers. Eodem modo ratio 1. ad 27. eſt ſubtripla rationis 9. ad 27. & 1. ad 81. ſubqvadrupla rationis 27. ad 81. & ſic in cœteris. Sed quæ de harmonicis poſtea ſubjunguntur, cum hac explicatione non videntur convenire poſſe. Quicquid ſit: certum qvidem eſt, Theonem Smyrnæum & alibi placita aliorum Geometrarum non tam accurate fuiſſe ſeqvutum. Cap. enim XXI. libri ſecundi definit ἀναλογίαν, qvamcunque mutuam habitudinem duarum rationum inter ſe. Ἀναλογία δὲ ἐστὶ λόγων, ἡ πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις, οἷον ὡς δύο πρὸς ἕν, οὕτως ὀκτὼ πρὸς τέσσαρα. *Analogia autem ſeu proportio, eſt mutua quæcunqve rationum relatio, verbi gratia, ut duo ad unum, ſic octo ad qvatuor.* Exemplum quidem adjunctum veram & Geometricam proportionem monſtrat: ſed definitio nimis eſt generalis. Etenim ſi ἀναλογία eſt mutua quæcunq; rationum relatio λόγων ἡ πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις, *qvaliſcunq; relatio rationum invicem*: utique cum inter rationes 3 & 1. & 5 ad 2. detur aliqva relatio, etiam

Digitized by Google

iam illic erit ἀναλογία: qvod tamen verum non eſt. Ἀναλογία enim eſt qvando rationes eædem vel æqvales fuerint. Ita qvidem bonus hic Theo parum accuratus in ſcribendo fuiſſe deprehenditur. Quod autem Marcus Meibomius hunc Theonis Smyrnæi ſive errorē, ſive opinionem, veteribus in genere attribuit, eamq; ob rem, eosdem carpit: id vel imperite admodum, vel maligne ab ipſo factum eſt. Diffiteri qvidem nequit quin inter veteres rerum Geometricarum ac Mathematicarum ſcriptores, hi vel inter primos ſint ponendi, Euclides, Ariſtarchus Samius, Archimedes, Theodoſius Tripolita aliiq;: quos tamen in eadem cum Theone Smyrnæo ſententia fuiſſe, vix ipſemet dixerit. Scripta qvidem eorum teſtantur, non tam arctis limitibus has voces circumſcripſiſſe, ut ſolas rationes exceſſûs majores dicerent, ſolasq; rationes defectûs minores. Etenim ſi duæ rationes exceſſus inæqvales comparentur invicem, unam qvidem majorem dixere, alteram minorem. Sic duarum inæqvalium rationum defectûs, unam qvidem majorem appellarunt, alteram minorem. Verum qvidem eſt qvamcunque rationem exceſſus, ſi cum alia ratione, vel æqvalitatis, vel defectus comparetur, ſemper eſſe majorem. Tum qvoq; qvamcunq; rationem defectûs, ſi cum ratione æqvalitatis aut exceſſus comparetur, ſemper eſſe minorem, qvod plenius poſtea demonſtrabimus. Neqve tamen ideo omnes rationes ex-

ceſſus

Digitized by Google

ceſſus ſimpliciter loqvendo majores ſunt dicendæ; niſi reſpectu rationis æqvalitatis. Neque omnes rationes defectus ſimpliciter minores ſunt dicendæ; niſi reſpectu rationis æqvalitatis. Nam ut una ratio exceſſûs, altera ratione exceſſus, major eſt, altera minor: ſic eodem modo, duæ rationes defectûs invicem collatæ, unam faciunt altera minorem, alteram vero majorem. Quando ergo ratio æqvalis aut major aut minor dicitur: tum id ſemper fit reſpectu alterius rationis. Eqvidem ſi dicamus Theonem unamqvamq; rationem duplici modo conſideraſſe, primo qvidem, ut antecedens ad conſeqvens, ſecundo, ut conſequens ad antecedens; aliqvo modo hæc ſententia tolerari poteſt. Nam in rationibus æqvalitatis, ut antecedens ad conſeqvens, ſic conſeqvens ad antecedens. In rationibus vero exceſſus, antecedens ad conſeqvens majorem rationem habet, qvam conſeqvens ad antecedens. In rationibus vero defectus, ratio antecedentis ad conſeqvens, eſt minor qvam conſeqventis ad antecedens. Id certum eſt veterum Geometrarum præſtantiſſimos optime noviſſe qvænam rationes eſſent æqvales, qvæ majores, qvæ minores. Adeoque mera calumnia eſt Meibomii, qvi veteres in genere ſine omni exceptione accuſat, qvod in his appellationibus erraverint. vid. pag. libri ipſius 110. lin. 7. & 8. & confer cum hac paginam qvam illic citat, nempe decimamtertiam.

Digitized by Google

CAP. VIII.

Explicata methodo inveniendi rationes æqvales tam in rationibus exceſſus, qvam defectûs: nunc illud nobis incumbere videtur, ut quod antea ſumus polliciti, id jam præſtemus, rationumq; conjunctionem, tam componendo, qvam dividendo in medium adferamus. Eſt ergo conjunctio rationum, quando factum ex multiplicatione aut diviſione antecedentis termini, alicujus rationis, per aliam rationem, comparatur cum conſeqvẽte eiuſdem rationis. Ut ſint duæ rationes 7 ad 2. 4 ad 3. invicẽ conjungẽdæ. Rationi 7 ad 2. qværitur æqvalis quæ ſe habeat ad 4. ut 7 ad 2. dico ergo, ut 2. ad 7. ſic 4. ad 14. Ratio ergo 14. ad 3. eſt compoſita ex rationibus 7. ad 2. & 4. ad 3. Eodem modo, ſi qværatur ratio facta ex rationibus 2. ad 7. & 4. ad 3. dico dividendo, ut 7. ad 2. ſic 4. ad alium $1\frac{1}{7}$. Ratio ergo $1\frac{1}{7}$ ad 3. ſeu 8. ad 21 in integris numeris eſt facta per diviſionem ex rationibus 2 ad 7. & 4. ad 3.

Omnis ergo ratio, qvæ cum alia ratione conjungitur, eſt vel exceſſus, vel defectus. Si ratio fuerit exceſſus, tum per multiplicationem factum invenitur. Si autem ratio fuerit defectus perdiviſionem. Atque illic qvidem factum erit maius, utpote compoſitũ: heic vero factum erit minus, utpote diviſum. Quod exemplis ac demonſtratione oculari melius percipitur. Tres autem omninò caſus ſunt, qvi in hac conjunctione conſiderantur. Etenim vel duæ

Digitized by Google

duæ rationes exceſſus conjunguntur invicem, vel duæ rationes defectûs, vel una ratio exceſſûs altera defectus. Si ambæ rationes exceſſûs fuerint; multiplicando productum augetur: adeoq;, ratio compoſita fit major rationibus componentibus. Si ambæ rationes fuerint defectûs: tum una ratio alteram dividit: ratioq; diviſa, utraqve ratione; nempe & dividente & dividenda, minor eſt. Deniqve ſi una ratio fuerit exceſſûs, altera defectûs: tum ratio exceſſus, diviſa per rationem defectûs, dabit factum ſeu productum, minus qvidem ratione exceſſûs, majus vero ratione defectûs. Sit in figura num. VI. ratio A ad B conjungenda rationi C ad D. utraq; qvidem ratio eſt exceſſûs, A enim excedit B. & C excedit D. qværo ergo alium terminum nempe E. qvi qvidem ſe habeat ad C. ut A ad B. Quoniam ergo qværitur ratio E ad C. æqvalis rationi A ad B. inveſtigatur qvidem ille in lineis per multiplicationem: eritq;, ut B ad A. ſic C ad E. vel conſtructis binis triangulis æqviangulis, factaque IB æqvali rectæ B, & IC. æqvali rectæ C, denique BA æqvali rectæ A: erit multiplicando, ut minor terminus IB. ſeu B, ad majorem BA ſeu A; ſic IC ſeu C. ad CE vel E. adeoqve ut ſe habet AB ad BI. hoc eſt A ad B; ſic ſe habet EC ad CI. vel E ad C. Ratio ergo E ad D. eſt facta per conjunctionem duarum rationum exceſſûs, A ad B, & C ad D. idque inveniendo per multiplicationem terminum E, & rationem E ad C. æqvalem rationi A ad B.

In

In omnibus ergo magnitudinibus, qvando duæ rationes exceſſûs invicem conjunguntur; tum terminus ille qui cum conſeqvente alterius rationis, ut cum ſuo proprio conſeqvente comparatus, dat rationem conjunctam ſeu compoſitam, ſeu qvi ad antecedentem terminum unius rationis ſe habet, ut antecedens alterius rationis ad ſuum conſeqvens; invenitur per multiplicationem. Adeoque ratio compoſita ex binis rationibus exceſſûs, eſt major utraq; ratione, ex qva componitur.

Quando autem duæ rationes defectus conjunguntur invicem, ita ut faciant aliam rationem: tum una ratio dividit aliam, adeoq; factum ſeu productum minus eſt eo ex qvo fit. Sit in fig. num VI. ratio B ad A defectûs, & D ad C. etiã defectus, qværo terminum qvi ſe habeat ad D. ut B ad A. hoc eſt qværo rationem ex binis hiſce rationibus factam ſeu enatam. Qvoniam autẽ terminus qvi inveſtigatur ſe habet ad D. ut B ad A ratio autem BA. ſit defectus, ergo ratio huic æqvalis inveſtigatur per diviſionem. ut Capite VII. demonſtratum eſt. Unde dico ut A ad B. ſic D ad qvartum ſeu minus. vel conſtructis binis triangulis æqviangulis fig. num. VII. nempe ABC & ADE. eſt ut AB. hoc eſt A, ad BC. hoc eſt B; ſic AD ſeu D, ad DE ſeu E. Adeoq; terminus qvæſitus E ſe habet ad D, ut B ad A. Inventus autem eſt hic terminus per diviſionem. ratio ergo D ad C. dividitur per rationem B ad A. in rationem E ad C. adeoque dividenda ratio eſt D ad C. dividens

videns ratio eſt B ad A. & diviſa ſeu facta eſt E ad G. Quando ergo duæ rationes defectus aliam faciunt rationem, ratio qvæ inde enaſcitur eſt, diviſa, hoc eſt, facta ex diviſione unius rationis per aliam.

Atq; hoc in magnitudinibus ſatis liquet. Quod autem etiam in numeris eodem modo ſe habeat, ex rationibus effabilibus demonſtratur. Sint ergo duæ rationes exceſſus invicem componendæ 7 ad 2. & 4 ad 3. hoc eſt, in magnitudinibus, ſit in fig. num. VIII. A. ſeptem partium talium, qvalium B. eſt duarum: C. vero talium quatuor, qvalium D. eſt trium. Quæro per priora rationem compoſitam ex hiſce binis, hoc eſt, qværo terminum E. qvæ ſe habeat ad C. ut A ad B. tum enim ratio E ad D. erit facta ex ratione C. ad D. per rationem A ad B. Quoniam vero ratio A ad B. eſt exceſſus, ergo æqvalis huic rationi invenietur per multiplicationem; ut capite VI. dictum fuit: exſtructisq; ſimilibus triangulis, erit, ut B ad A. ſic C ad E. Adeoque ratio E ad C. erit æqvalis rationi A ad B: ratio autem E ad D. compoſita ex binis rationibus A. ad B. & C. ad D. In numeris ergo idem obtinebimus. Quæratur enim ratio æqvalis rationi 7 ad 2. dato conſeqvente 4. ſeu, qværatur numerus, qvi ſe habeat ad 4. ut 7 ad 2. erit ut 2 ad 7. ſic 4 ad qvæſitum 14. Adeoque 14 ſe habet ad 4. ut 7 ad 2. Ratio autem 14 ad 3. eſt compoſita ex ratione 7 ad 2. &

Digitized by Google

4 ad 3. In rationibus autem defectus, methodus eſt inverſa, ſicut etiam in magnitudinibus. Si enim qværatur ratio facta ex binis rationibus 2 ad 7. & 3 ad 4: qværitur terminus qvi ſe habeat ad 3. ut 2 ad 7. Hoc autem fit dividendo. Sit enim in figura num. VIII. B. duarum partium talium, qvalium A eſt ſeptem. D vero talium trium, qvalium C eſt qvatuor. Ratio ergo B ad A. & $\frac{2}{7}$: & ratio D ad C. eſt $\frac{3}{4}$. Divide B. eo modo, ut diviſum ad totum, ſe habeat, ut D ad C. Hoc eſt ſecta B. in qvatuor partes æqvales EF. FG. GH. HI. erit EH. talium trium partium, qvalium tota EI. hoc eſt B. eſt qvatuor: adeoq; EH. ſe habet ad B. ut D ad C. Qvalium autem B. fuerit 4, talium A. erit 14. adeoque ratio EH. facta dividendo ex ratione B ad A. per rationem D ad C. erit ut 3 ad 14.

Adeoq; liquet rationem factam ex binis rationibus exceſſus ſemper eſſe compoſitam, ideoque majorem partibus componentibus: factam vero ex binis rationibus defectus, ſemper eſſe diviſam. In rationibus enim exceſſus, antecedens unius rationis augetur eo modo, ut auctum ad primum, eandem habeat rationem, qvam antecedens alterius rationis ad ſuum conſeqvens. In rationibus autem defectus antecedens unius rationis eo modo dividitur, ut diviſum ad totum, eam habeat rationem, qvam antecedens alterius rationis ad ſuum conſeqvens. Atque ex hoc fundamento Euclides à priori demóſtravit propoſitionem

nem

nem XXIII. libri VI. Elementorum, ubi in æqviangulis parallelogrammis monſtrat hanc rationem factam ex binis aliis: qvam qvidem Propoſitionem ipſemet Meibomius nuſquam falſi accuſat, tantum ait, illam ab aliis Geometris non fuiſſe intellectam, idque ob hanc ſolam cauſam, qvod rationum ineffabilium compoſitionem hinc demonſtrari poſſe ignoraverint. Sed de hac Meibomii falſitate poſtmodum. Nunc illud tantum indicare volui, Euclidem ea omnia qvæ hucuſque de compoſitione & diviſione rationum demonſtravi, ſimpliciter ut principium ſupponere, ad propoſitionem prædictam. Demonſtrationem integram adſcribam ut benevolus Lector, eo melius de tota re judicare poſſit. Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ. ΓΖ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ. λέγω ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τοῦτε ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλλελόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς Λ· ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Μ. Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ, καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοὶ εἰσὶ τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Digitized by Google

Ἀλλ' ὁ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ λόγου, καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ. ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. Πάλιν ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ, ἀλλ' ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ. καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον, Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον. ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ· δι' ἴσου ἄρα ἐστιν, ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ. Ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ. λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Sint in figura num. IX. *æqviangula parallelogramma* ΑΓ *&* ΓΖ *in qvibus angulus* ΒΓΔ *unius parallelogrammi, æqvalis ſit angulo* ΕΓΗ *alterius parallelogrammi: dico qvod* ΑΓ *parallelogrammum ad* ΓΖ *parallelogrammum rationem habeat conjunctam ſeu factam ex lateribus; nempe ex ratione qvam habet* ΒΓ *ad* ΓΗ, *& qvam habet* ΔΓ *ad* ΓΕ, *Jaceant enim* ΒΓ *in directum ipſi* ΓΗ. *Recta ergo* ΔΓ *etiam in directum jacebit ipſi* ΓΕ (per propoſiti-

onem

onem XIIII. I. Elem. Sunt enim anguli ΔΓΗ & ΗΓΕ æqvales duobus rectis). *Compleatur* ΔΗ *parallelogrammum; & ſit aliqva recta, nempe K. fiatque ut* ΒΓ *ad* ΓΗ *ſic* Κ *ad* Λ. *Ut vero* ΔΓ *ad* ΓΕ. *ſic* Λ *ad* Μ. *Rationes ergo* Κ *ad* Λ, *&* Λ *ad* Μ *eædem ſunt, qvæ rationes laterum, nempe* ΒΓ *ad* ΓΗ, *&* ΔΓ *ad* ΓΕ. *Sed ratio* Κ *ad* Μ *facta eſt ex ratione* Κ *ad* Λ, *&* Λ *ad* Μ, *ita ut ratio* Κ *ad* Μ *rationem habeat factam ex lateribus. Et qvoniam eſt, ut* ΒΓ *ad* ΓΗ, *ſic* ΑΓ *parallelogrammum ad* ΓΘ *parallelogrammum; ſed ut* ΒΓ *ad* ΓΗ, *ſic* Κ *ad* Λ: *erit ergo ut* Κ *ad* Λ, *ſic* ΑΓ *parallelogrammum ad* ΓΘ *parallelogrammum. Rurſum qvoniam eſt, ut* ΔΓ *ad* ΕΓ, *ſic* ΓΘ *parallelogrammum ad* ΓΖ *parallelogrammum. Sed ut recta* ΔΓ *ad rectam* ΓΕ, *ſic* Λ. *ad* Μ. *Erit ergo ut* Λ *ad* Μ. *ſic* ΓΘ *parallelogrammum ad* ΓΖ *parallelogrammum. Qvoniam vero demonſtratum eſt, ut* Κ *ad* Λ, *ſic* ΑΓ *parallelogrammum ad* ΓΘ *parallelogrammum* (per I. propoſ. libri VI.) *ſicut vero* Λ *ad* Μ, *ſic* ΓΘ *parallelogrammum ad* ΓΖ *parallelogrammum: ex æqvo ergo erit, ut* Κ *ad* Μ. *ſic* ΑΓ *parallelogrammum ad* ΓΖ *parallelogrammum.* Κ *autem ad* Μ. *habet rationem factam ex lateribus. Ergo &* ΑΓ *parallelogrammum ad* ΓΖ *parallelogrammum rationem habebit factam ex lateribus.* Hæc eſt tota ratio demonſtrationis Euclideæ: ex qva liqvet auctorem id ſupponere qvod nos hucuſque propoſuimus, factam nempe rationem illam eſſe, qvæ eſt, inter terminum multiplicatione aut diviſione inventum, & conſeqvens unius rationis. Ut verbi gratia:

 ſi Λ

Digitized by Google

ſi Δ æqvetur ipſi ΔΓ & M ipſi ΓE, adeoque Δ ad M. ſit æqvalis rationi ΔΓ ad ΓE. pro invenienda ratione facta ex BΓ ad ΓH & Δ ad M. dico juxta noſtram methodum ut ΓH ad BΓ, ſic Δ ad K. Habet ergo K ad Δ eandem rationem qvam BΓ ad ΓH. adeoque K eſt terminus qvæſitus, qvi cum M comparatus dat rationem factam ex rationibus BΓ ad ΓH & ΔΓ ad ΓE. plane ut prius. Hoc ergo ſupponit Euclides, neque ullo modo explicat, qvod forte Meibomio cauſa erroris fuit. Nos autem demonſtramus, & rem ſe ita habere; & tamen alias eſſe rationes compoſitas, eas nempe qvæ per multiplicationem inveſtigantur, & alias rationes diviſas, qvæ per diviſionem.

Quod autem vocem συγκείμενον expoſuerimus per factam, ejus qvidem rei hanc cauſam habuimus. Quoniam enim majus qvidem parallelogrammum ad minus in rationibus exceſsûs, compoſitam habeat rationem ex ratione laterum; minus vero, rationem diviſam: ideo pro voce συγκείμενον, poſuimus factam, qvæ & compoſitioni per multiplicationem, & diviſioni convenit. An vero Euclides eo ſenſu hanc vocem uſurpaverit, id pro certo non affirmaverim. Qvamvis enim Euclides hoc modo à crimine negligentiæ liberari poſſit, qvaſi ipſam qvoque rationum diviſionem hoc verbo comprehendiſſet; qvod & capite VI. pag. 103. à nobis tentatum fuit: tamen ſi accurate omnia ſunt examinanda, vereor ne hoc minus

cer-

Digitized by Google

certum deprehendatur. Dicendum potius eſt, ipſum non magis in hac propoſitione XXIII. libri VI. diviſionis rationum meminiſſe; qvam in definitionibus: adeoque ſolam rationum compoſitionum ipſi fuiſſe traditam, quod exiſtimaret, contrariorum contrariam eſſe ſcientiam. Ipſæ enim voces συγκεῖσθαι & συντίθεσθαι apud Euclidem eandem rem denotare videntur, ut ex propoſitionibus XVII. & XVIII. libri V. Elementor. liqvet. Libro qvidem VI. Elementorum definitione ultima, dat nobis compoſitionis rationum talem definitionem. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσι τινά. *Ratio ex rationibus componi dicitur, qvando duarum rationum qvantitates invicem multiplicatæ faciunt aliam.* Legendum omnino cum antiqvis τινὰ pro τινας. Quid autem πηλικότης rationum ſit, aut qvomodo debeat multiplicari, id minime indicat. Eqvidem ſi per multiplicationem qvantitatum rationum illam intelligit, qva antecedentia invicem, & conſeqventia invicem multiplicantur: dubium non eſt: qvin ipſa qvoqve rationum diviſio, ſub hac definitione comprehendi poſſit. Sit enim ratio ΕΓ ad ΓΔ in figura num. IX. defectûs, & ratio ΗΓ ad ΓΒ etiam defectus: utraque autem ſit effabilis, ac prior qvidem, ut 2 ad 7. altera vero, ut 3 ad 4. Si ergo factam ex hiſce rationibus aliam velim, divido unam ratio-

Digitized by Google

rationem per aliam. Sit itaq; in figura numero X. ut ΒΓ ad ΓΗ, ſic ΓΕ ad ΗΝ. vel in nnmeris, ut 7 ad 2. ſic 3. ad $\frac{8}{7}$. vel qvod idem eſt, ſic 21 ad 6. poſita nempe pro ratione 3 ad 4. rarione 21 ad 28. qvæ huic eſt æqvalis. ratio ergo facta ex prioribus eſt 6 ad 28. ſeu 3 ad 14. Sed eadem ratio permultiplicationem antecedentium invicem & conſeqventium invicem inveſtigatur. Bis terna enim ſunt ſex & qvatuor ſeptena 28. Unde ratio facta eſt ſex ad 28. vel 3 ad 14.

Hoc ipſum in rationibus ineffabilibus locum habet. Sint enim rationes ΓΕ ad ΓΔ & ΗΓ ad ΓΒ ambæ ineffabiles & defectus: qværo ex iis rationem factam. Cum autem compertum ſit ambas eſſe rationes defectûs, ergo qvarta qværitur per diviſionem. Unde eſt in figura num. X. ut ΒΓ ad ΓΗ. ſic ΒΕ qvæ eſt ΓΕ ad ΗΝ. Ratio ergo ΗΝ ad ΓΔ eſt facta ex ratione ΕΓ ad ΓΔ diviſa per rationem ΗΓ ad ΒΓ. ſicut capite VII. demonſtratum eſt. At vero multiplicando antecedentia harum rationum invicem & conſeqventia invicem, eadem ratio facta inveſtigatur. Conſtructis enim binis parallelogrammis æqviangulis ΑΓ & ΓΖ. junctisq; circa æqvalem angulum; ita ut ΗΓ in directum jaceat ipſi ΓΒ, & ΕΓ ipſi ΓΔ: clauſoqve parallelogrammo ΔΓΗΘ. dico parallelogrammum ΖΓ habere ad parallelogrammum ΓΑ rationem factam ex diviſione rationis laterum ΕΓ ad ΓΔ, per rationem laterum ΓΗ ad ΓΒ. Dividatur enim ratio ΗΓ ad ΓΒ per rationem ΕΓ ad ΓΔ, modo antea explicato; hoc eſt, dicatur, ut ΓΔ ad ΓΕ, ſic ΗΓ ad ΓΝ.

ſump-

ſumptaque æqvali ΓΝ in linea ΓΒ exſtructoque parallelogrammo æqviangulo, ducta parallela ΝΑ ipſi ΑΒ vel ΓΔ; erunt parallelogramma ΑΓ & ΓΖ æqvalia: eritq; ut ΓΔ ad ΓΕ, ſic ΔΗ ad ΓΖ. ſed ut ΔΓ ΓΕ, ſic ΓΗ ad ΓΝ. ergo ut ΔΗ ad ΓΖ, ſic ΗΓ ad ΓΝ. hoc eſt ΗΔ ad ΑΓ. Eandem ergo rationem habet ΗΔ ad ΓΖ qvam ad ΑΓ. Quæ autem ad idem eandem habent rationem, inter ſe ſunt æqvalia. Unde rurſum ΓΖ ad ΑΓ eandem habebit rationem, qvam ΑΓ ad ΑΓ. Habet vero ΑΓ ad ΑΓ eam rationem, qvam ΝΓ ad ΓΒ. hoc eſt rationem factam ex diviſione rationis laterum ΗΓ ad ΓΒ per rationem laterum ΕΓ ad ΓΔ. Ratio ergo ΓΖ ad ΓΑ eſt facta ex diviſione rationum laterum invicem: idque per multiplicationem antecedentium invicem, & conſeqventium invicem. Quando enim ex binis lateribus exſtruitur parallelogrammum: tum latera invicem ſunt multiplicata. Adeoque ex hac ipſa figura demonſtratur, qva ratione, eadem plane methodo, & in Arithmeticis & Geometricis ratio facta ex binis aliis rationibus inveſtigatur: nempe per multiplicationem antecedentium inter ſe, & conſequentium inter ſe; in omni collatione rationum, tam exceſſus invicem, qvam defectus. Id qvoque ex hoc Theoremate liqvet, quo modo, in magnitudinibus ratio quæcunque facta ex binis qvibuſcunq; rationibus per multiplicationem terminorum invicem, in lineis inveniatur & exhibeatur. Ratio enim ΒΓ ad ΓΝ eſt facta ex binis rationibus exceſsûs, ΒΓ ad ΓΗ, & ΔΓ ad ΕΓ, per multiplicationem am-

 borum

Digitized by Google

borum terminorum invicem. Habet enim parallelogrammum ΔΓ ad parallelogrammum ΓΖ rationem factam ex binis rationibus exceſsûs ΒΓ ad ΓΗ, & ΔΓ ad ΓΕ. At ratio ΔΗ ad ΗΕ ſeu ΓΖ, eſt eadem qvæ ΔΓ ad ΓΕ, hoc eſt qvæ ΗΓ ad ΓΝ. Parallelogramma ergo ΑΓ & ΓΖ ſunt æqvalia. unde ut ΑΓ ad ΓΖ, ſic ΑΓ ad ΑΓ. adeoque ratio ΑΓ ad ΑΓ erit facta ex ratione ΒΓ ad ΓΗ, & ΔΓ ad ΓΕ. Unde & ΒΓ ad ΓΝ, qvæ eſt eadem, qvæ ΑΓ ad ΑΓ erit facta ex rationibus ΒΓ ad ΓΗ, & ΔΓ ad ΓΕ. Adeoque in omnibus rationibus, tam exceſsûs, qvam defectûs, ratio facta eodem modo, & in Geometricis, & Arithmeticis inveſtigatur; nempe per multiplicationem amborum terminorum invicem. Id autem ideo contingit, qvod in utraque ratione tam exceſſus qvam defectus, iidem utrobique ſint termini: hoc tantum diſcrimine, qvod antecedentia rationum exceſsûs ſint conſeqventia rationum defectus: & vice verſa, conſeqventia rationum defectus, ſint antecedentia rationum exceſſus: unde per multiplicationem antecedentium invicem, & conſeqventium invicem, tam in rationibus defectûs, qvam exceſsûs, ratio facta inveſtigatur. In rationibus enim exceſſus 2 ad 1. & 4 ad 3. ſi antecedentia 2. & 4. fiant conſequentia, & conſequentia 1. & 3. fiant antecedentia; ut ſit, 1 ad 2. & 3 ad 4. jam duæ hæ rationes ſunt defectûs: unde factum ex utrisque rationibus tam exceſsûs, qvam defectûs eodem modo colligitur: ita tamen ut antecedens in rationibus exceſsûs, ſit conſequens in rationibus defectûs. bis qvaterna e-

na enim ſunt 8. ſemel terna ſunt 3. unde ratio facta ex rationibus exceſsûs, eſt 8 ad 3. ratio autem 3 ad 8. eſt ratio facta ex rationibus defectûs. Nemo tamen dixerit rationem 3 ad 8. eſſe compoſitam ex rationibus 1 ad 2. & 3 ad 4. Neque enim compoſitum minus eſt iis unde componitur. Rationem autem 3 ad 8. minorem eſſe ratione 1 ad 2. vel ratione 3 ad 4, & ex Euclide conſtat, & verum eſſe id ipſum poſtea contra Meibomium clariſſime ac certiſſime monſtrabimus. Si ergo ex Euclide aliqvis contenderit, rationes omnes tam exceſsûs qvam defectûs invicem eodem modo componi, eo qvod facta ratio; tam ex compoſitione rationum exceſsûs, qvam diviſione rationum defectus, per multiplicationem τ̃ πηλικοτήτων eodem modo inveſtigetur; id autẽ ab Euclide compoſitio vocetur: reſpondeo Euclidem aliter explicari poſſe. Videtur enim in hac definitione ſolam rationum exceſsûs compoſitionem tradere voluiſſe. De diviſione autem, & ratione facta ex binis rationibus defectus nullum verbum feciſſe. Nam & alibi neceſſariarum rerum definitiones omittit. Rationem enim minorem nuſqvam definit. Tum ipſius qvoqve majoris rationis definitio, potius eſt theorema aliqvod demonſtratione ſatis ampla indigens, qvam definitio. Dici quoq; poteſt Euclidem voce συγκεῖσαι latè ut loqvuntur in Scholis fuiſſe uſum, pro omni conjunctione qva ex duobus unum fit, tam multipli-

Digitized by Google

cando, quam dividendo, quam explicationem ſuperius etiam indicavimus capite VII. pag. 203. Quod ſi neutra hæc explicatio ipſi ſatisfecerit: neque aliam commodiorem ipſe invenerit, qva Euclides excuſari poſſit: per me hac in parte Euclidem accuſet ignorantiæ, & quod inter diviſiones rationum, & earundem compoſitiones non accuratè diſtinxerit, neque has res plene ac diſtinctè tradiderit. Neq; enim mihi propoſitum eſt, negligentiam Euclideam defendere; ſed veritatem in omnibus tutari. Qvod ſi ergo Marcus Meibomius ab hoc capite accuſationem contra Euclidem inſtituiſſet; me ſibi contrarium non habuiſſet. Nunc cum vera & manifeſta falſi arguere conetur; exploſione dignus eſt.

Tertius autem caſus eſt, qvando ratio qværitur facta ex ratione exceſſûs per rationem defectus, vel ratione defectus per rationem exceſſus: qvæ qvidem ratio & multiplicando, & dividendo inveſtigatur. Si enim ratio defectus multiplicetur per rationem exceſſus; vel ſi ratio exceſſus dividatur per rationem defectus: eadem oritur ratio facta. Quæratur enim ratio facta ex rationibus 8 ad 3. & 2 ad 5. Fiat multiplicando ut 8 ad 3. ſic alius ad 2, hoc eſt ut 3 ad 8. ſic 2 ad $5\frac{1}{3}$ hoc eſt, ſic 6 ad 16. Ratio ergo $5\frac{1}{3}$ ad 5. ſeu in integris numeris 16. ad 15. eſt facta multiplicando ex ratione 2 ad 5. per rationem 8. ad 3.

Rurſum fiat dividendo, ut 5 ad 2, ſic 8 ad $3\frac{1}{5}$. Ratio-

tio ergo $3\frac{1}{5}$ ad 3, ſeu 16 ad 15. eſt facta ex ratione 8 ad 3 diviſa per rationem 2 ad 5. Reſpectu ergo rationis defectus facta ratio compoſita dici poteſt: reſpectu autem rationis exceſſus, diviſa. Si tamen accuratè loqvi velimus, ratio diviſa dicitur. In diviſione enim fieri poteſt, ut diviſum ſit majus diviſiore. Sed in compoſitione fieri nequit, ut compoſitum ſit minus componente.

Ut ergo breviſſimè totam rem abſolvam, totamque factarum rationum naturam Lectori ob oculos ponam, dico omnes rationes vel eſſe integri ad integrum, ſeu totius ad totum: vel totius ad partem: vel partis ad totum. Nempe ratio æqualitatis eſt integri ad integrum, vel totius ad totum: neuter enim terminus alterius, vel pars eſt, vel totum. Ratio autem exceſſus eſt totius ad partem. Omnis enim magnitudo major continet minorem magnitudinem in ſe. Adeoq; minor magnitudo majoris magnitudinis pars eſt: & major minoris totum, unde ratio eſt totius ad ad partem. In rationibus vero defectus ratio eſt partis ad totum. minor enim magnitudo eſt pars majoris, quod contineatur in majore, non ſecus ac manus eſt pars corporis. Facta autem ratio eſt, qvando binis rationibus datis, inveſtigatur terminus, qvi ad antecedens unius rationis ſe habeat, ut antecedens alterius rationis ad ſuum conſeqvens. Ratio autem termini hujus ad conſequens prius, eſt ratio facta ex binis datis rationibus. Unde in rationibus exceſſus cum ratio

tio facta ſit termini qvarti ad conſequens, qvi qvidem terminus eſt ad antecedentem ejus rationis, ut totum ad partem: debet ergo terminus eſſe major antecedente, adeoque ratio ipſa augeri. In rationibus autem defectus, terminus qvæſitus debet eſſe pars antecedentis, ſicut alterum antecedens eſt pars ſui conſeqventis. At vero partem alicujus rei minorem ad aliud habere rationem, qvam ſuum totum; id communi notione verum deprehenditur: majorem vero rationem habere partem ad aliud, qvam ſuum totum; id plane abſurdum eſt.

CAP. X.

Ut autem omnia & ſingula, qvæ hactenus de compoſitione & diviſione rationum dicta ſunt, rectius intelligantur: hoc capite de ſingulis momentis iterum paucis dicemus. Fit ergo omnis rationum compoſitio, vel per additionem, vel per multiplicationem: omnis autem diviſio, vel per ſubtractionem, vel per diviſionem ſigillatim ita appellatam. Eſt autem additio rationum, qvando duabus rationibus ad idem conſeqvens reductis, ambo antecedentia adjecta invicem faciunt unum antecedens, qvod cum priori conſeqvente comparatur.

Multiplicatio autem rationum in magnitudinibus eſt, qvando antecedens unius rationis per alterius rationis antecedens multiplicatum, dat aliud antecedens, qvod cum priori conſeqvente cōparatur.

Sub-

Subtractio rationum eſt, cum binis rationibus ad idem conſeqvens reductis minus antecedens à majore aufertur, aliudque relinqvit antecedens, qvod cum priori conſeqvente comparatur.

Diviſio rationum in magnitudinibus eſt, qvando antecdens unius rationis per alterius rationis antecedens diviſum, dat aliud antecedens, qvod cum priori conſeqvente comparatur.

Singula jam exemplis ſunt illuſtranda. Sit ergo ratio 4 ad 3. addenda rationi 7 ad 5. reductis ambabus rationibus ad eundem terminum conſeqventem, ita ut pro ratione 7 ad 5. ponatur ratio 21 ad 15. qvæ huic eſt æqvalis: pro ratione autem 4 ad 3. ponatur 20 ad 15. qvæ etiam huic eſt æqvalis. Additis invicem 20. & 21. prodit ratio 41. ad 15. facta ex additione rationum 21 ad 15. hoc eſt 7 ad 5. &, 20 ad 15. hoc eſt 4. ad 3.

Eodem modo ſi qværatur ratio facta ex additione rationum 3 ad 4. & 5 ad 7. hoc eſt 21 ad 28. & 20 ad 28. prodit ratio 41. ad 28. Sic ratio 3 ad 4. addita rationi 7. ad 5. dat rationem factam ex additione 43 ad 20.

Uſus autem hujus additionis in Mechanicis atque in omni hominum vita qvam maximus eſt. Atq; ut exemplis aliqvot hoc Lectori ob oculos ponatur, ſit primo in Mechanicis, ſaxum oblongum à terra elevandum plauſtroque imponendum ABCDEF fig. no. vectis XI autem GH movens in H. & vectis IK movens in K. Sit autem

autem momentum GH minus pondere toto, ſitque ratio moventis GH ad movendum BACDFE ut 3 ad 4. Huic autē æqvalis ſit ratio moventis IK ad motum BACDFE Si igitur velim ſcire rationem compoſitam ex hiſce binis rationibus, hoc eſt, rationem, qvam ambo moventia ad motum corpus habent: vel, ſi eodem tempore, binis vectibus ſaxum æqvaliter elevetur; qvænā tum ratio ſit moventis ad motum: addo antecedentia invicem, adeoque pronuncio rationem moventis ad motum, compoſitam ex binis rationibus moventibus, eſſe ut 6 ad 4. Et rationem moventis ad motum vere eſſe, ut 6. ad 4. vel 3 ad 2. hoc eſt ſeſqvialteram, manifeſte liqvet. Quod ſi pro additione rationum altera heic compoſitione uti vellem, qvæ fit multiplicando; falſum concluderem, neqve veram rationem moventis ad motum inveſtigarem. Si enim vulgari modo procederem, multiplicando antecedentia invicem, & conſeqventia invicem, facta ratio eſſet 9 ad 16. qvæ plurimum differt à ratione 3 ad 2. ſeu ſeſqvialtera. Sive debito hæc modo componerem, invertendo poſteriorem rationem, cum alias compoſitio in hiſce rationibus fieri neqveat, & poſtea multiplicando unum antecedens per aliud, dicendo, ut conſeqvens unius ad ſuum antecedens, ſic antecedens ad qvartum: ratio facta eſſet $5\frac{1}{3}$ ad 3. ſeu 16 ad 9. qvæ etiam à vera plurimum differt. Hæc ergo rationum compoſitio, qvæ fit per additionem, non minorem utilitatem in rebus

habet,

Digitized by Google

habet, qvam altera illa, qvæ multiplicando inveſtigatur. Et æqvè, rationum compoſitio eſt, dicenda: cum ratio ex binis hiſce rationibus verè ſit facta. Duæ enim rationes, 3 ad 4, & 3 ad 4, qvæ ſunt moventis ad id qvod movetur, verè conjunguntur invicem: & ratio ex his facta, verè eſt 6 ad 4, ſeu 3 ad 2.

In omni autem additione, vel eædem rationes adduntur invicem, vel diſſimiles. Tum qvoque, vel ſemel adduntur invicem, vel ſæpius. Quando eædem rationes ſemel adduntur invicem, fit duplatio: & ratio facta, vocatur à Geometris, alterius rationis dupla. Atq; hoc modo, ratio 3 ad 2, ſeu 6 ad 4. eſt dupla rationis 3 ad 4. Duæ enim eædem rationes, 3 ad 4 & 3 ad 4 ſemel invicem adduntur: unde fit ratio 6 ad 4. qvæ eſt dupla rationis 3 ad 4. Si enim, in fig. num. XII. duæ æqvales magnitudines AB. & BC invicem addantur: facta AC erit dupla ipſius AB. Ita etiam, juxta hanc analogiam, Geometræ, rationem, factam ex binis rationibus æqvalibus, ſemel additis, duplam vocarunt. Cui etiam appellationi, ipſa rerum veritas aſſentitur. Momentum enim, cujus ratio, ad id qvod movetur, eſt 6 ad 4, vere duplum eſt illius momenti, cujus ratio, ad id qvod movetur, eſt 3 ad 4. Si enim momentum HG, in figura XI. facile movet BACDLMN ſemiſſem ipſius ABCDEF: etiam momentum IK facile movebit ſemiſſem LMNFE. adeoque, ſi ambo momenta ſimul agant; facile movebunt totum ABCDEF. hoc eſt, duplum ipſius BACDLM. Adoeque

qve ratio duorum momentorum GH & IF, ad totum ABCDFE. eſt dupla rationis HG. ad idem ABCDEF. Quando vero, duæ magnitudines inæqvales adduntur ; tum compoſita magnitudo, diverſam, ad componentia membra, rationem habet. Si enim in fig. XII. AB ſit 4 partium, Bc 2 partium, tota Ac. erit qvidem tripla ipſius Bc, ſeſqvialtera autem ipſius AB. Quod ipſum, in hac qvoque rationum compoſitione, quæ fit per additionem, venit obſervandum. Si enim ratio momenti GH, ad ABCDEF. in ſuperiori diagrammate XI, fuerit ut 4. ad 2; ratio autem momenti IK, fuerit ut 8 ad 2: erit ratio compoſita 12 ad 2. hoc eſt ſextupla: quæ qvidem rationis 4 ad 2. hoc eſt, 2 ad 1, eſt tripla, rationis autem 8 ad 2, ſeu 4 ad 1, eſt ſeſqvialtera. & ſic in cœteris omnibus.

Porro ſi rationibus binis æqvalibus invicem additis, aggregato harum, æqvalis ratio addatur: facta ratio, tripla dicitur, rationis primæ. & ſi hujus aggregato, eadem ratio tertiùm addatur; facta ratio, qvadrupla dicitur rationis primæ. & ſic qvintupla, ſextupla, & porro in infinitum.

Hujus etiam uſus in Mechanicis eſt demonſtrandus. Sit in fig. num. XIII. obeliſcus ABC erigendus ſuper ſtylobatam FGEDHI. Sint vero ergatæ ſex α.β.γ.δ.ε.ζ. omnes æqvalium virium inter ſe. Sit porro ratio ergatæ α, ad pondus obeliſci ABC, ut 7 ad 50. Ratio ergo ergatæ β, ad pondus obeliſci ABC. erit etiam, ut 7. ad 50, & ſingularum ergatarum ratio, ad totum pon-

pondus, ut 7 ad 56. Si vero duæ ergatæ ſimul agant, qværatur vero ratio moventis ad totum pondus: componantur duæ rationes, 7 ad 50. & 7 ad 50, invicem addendo: prodit ratio 14 ad 50: quæ etiam vera eſt ratio, duarum ergatarum, ad totum pondus. Unde ratio, 14 ad 50, eſt dupla rationis, 7 ad 50. Rurſum ſi ratio trium ergatarum, ad totum pondus qværatur; addantur tres rationes 7 ad 50 invicem, modo antea indicato: vel multiplicetur 7 per ternarium; eadem enim ſumma erit, nempe ratio 21 ad 50, qvæ etiam eſt vera ratio trium ergatarum ad totum pondus. Tres vero æqvales ergatas, triplam, ad totum pondus, rationem habere, rationis, unius ergatæ ad totum pondus, nemo ſanus negabit; cum triplam operationem habeat, & triplo magis moveat: adeoq; ratio moventis ſit tripla. Hoc modo, ſi ſex ergatarum rationes componantur: erit ratio moventis, ad id qvod movetur, ut 42 ad 50. qvæ qvidem eſt ſextupla rationis 7 ad 50. At vero in omni motu, ratio moventis ad motum, omnino erit ratio exceſsûs. Si enim æqvalitatis fuerit, reſiſtentia rei movendæ, æqvalis erit impulſioni moventis: adeoque nullus motus fiet. Sin ratio defectus: major erit movendæ reſiſtentia, qvam moventis impulſio. unde multo minus, tunc ullus motus fiet. Addatur ergo, ratio unius pluriumve ergatarum, uſquedum, ratio moventis ad motum, fuerit exceſsûs. Si ergo unius adhuc ergatę, nempe, ratio, cum ſuperioribus componatur; erit ratio mo-

 ventis

Digitized by Google

ventis ad movendum,ut 49 ad 50. duarum vero ergatarum rationibus, priori rationi, additis: erit ratio moventis ad movendum,ut 56 ad 50.qvæ qvidem ratio, eſt octupla, rationis 7 ad 50.

Atque ex his liqvet, qvid ratio dupla, tripla, octupla, hoc in ſenſu ſit: & qvam bene, hæc nomenclatura huic rei conveniat. Idipſum quoque, quod heic maxime demonſtratum cupimus, hinc clariſſime liquet: rationes ipſas, addendo verè componi atque augeri.

Eſt quidem,alia quædam in miſtis compoſitio,qvæ, additione antecedentium & conſequentium, peragi videtur: quæ tamen, proprie, compoſitio rationum non eſt. Si enim, eædem, vel æqvales rationes, invicem,eo modo,addantur,ſemper,ratio facta,erit eadem ſeu æqvalis, Ut ſi v. g. miſtum farinæ hordeaceę, & fabaceæ,in qvo, ratio hordei ad fabas ſit ut 4 ad 2 miſceatur cum miſto alterius farinæ, in qvo, ratio hordei ad fabas ſit,ut 8 ad 4: facta additione, antecedentium invicem, & conſeqventium invicem; prodit ratio facta 12 ad 6. Ea autem eſt æqvalis rationi 4 ad 2,vel 8 ad 4. Unde hęc rationum compoſitio dici neqvit: cum ratio facta, non ſit major ea, ex qva componitur.

Subtractio autem rationum, additionis eſt converſio. Si enim, in priori diagrammate, rationi 56 ad 50. rationem 47 ad 50 detractam velim, aufero antecedens minus à majori: facta eſt operatio. Atque hoc qvidem modo, ratio 7 ad 50, eſt ſuboctupla rationis 56 ad 50: ſubdupla vero, rationis 14 ad 50: & ſubtripla

pla 21 ad 50. Sed hoc ipſum, diagrammate quodam, demonſtrandum. Si ergo, in figura XIIII, pro obeliſco, ſupponatur corpus parallelepipedum oblongum, cujus qvidem ratio, ad omnes octo ergatas, ſit, ut, 50 ad 56, incipiatq; parallelepipedum moveri: quo magis elevatur, eo minorem rationem ad ergatas habebit. Nam cum linea centri gravitatis perpetuo mutetur: etiam ipſum pondus mutatur. Diviſa enim baſi KLMN in partes æqvales quotcunque, verbi gratia, decem, nempe OPQRSTVXYN. ſectoque parallelepipedo in totidem ſegmenta juxta angulos rectos; erunt ſingula ſegmẽta KLOo, OoPp, PpQq, Qq Rr, &c. ſingulis ſegmentis æqvalia. Tum qvoq;, parallelepipedum KLPp erit duplum parallelepipedi KLoO: & parallelepipedum KLQq, triplum parallelepipedi KLOo: & ſic KLRr, qvadruplum ipſius KLOo: & KLSs qvintuplum. Secto autem parallelepipedo KLOo plano diagonali OL: erit parallelepipedum KLOo ſectum in duo priſmata triangularia LOl & OLo. Eodem modo, ſecto parallelepipedo KLPp plano diagonali Lp: erit totum parallelepipedum ſectum, in bina priſmata triangularia lLp & LpP invicem æqvalia. & ſic in cœteris. Quoniam ergo, KLOo parallelepipedum, eſt pars decima KlMN parallelepipedi: erit priſma loL, qvod eſt, ſemiſſis ipſius KLOo, pars viceſima totius parallelepipedi KLMN. Et eodem modo, KlLp priſma, eſt decima pars parallelepipedi KLMN, utpote ſemiſſis, KLPp parallelepipedi. Si ergo

Digitized by Google

go parallelepipedum KLMN nonnihil erigatur, ita ut OL horizonti ſit perpendicularis: erit pondus totius parallelepipedi, una viceſima parte imminutum: ratio autem moventis aucta. Quoniam ergo, ratio moventis, ad rem movendam, antea erat, ut, 56 ad 50. dempta viceſima parte ponderis, erit ratio moventis, ad rem movendam, ut, 56 ad 47 $\frac{1}{2}$ ſeu ut 112 ad 95. Rurſū, elevato parallelepipedo KLMN, ita, ut pL ſit perpendicularis horizonti, erit pondus totius parallelepipedi decima parte imminutum: ratioque moventis ad rem motam, ſine augmento altero ipſius parallelepipedi, ut, 112 ad 90, vel 56 ad 45. Quoniam ergo, in omni majoris parallelepipedi elevatione, ratio rei movendæ imminuitur; ratio vero moventis augetur: ergo, illic quidem, erit ſubtractio rationum; heic vero, additio. Et cum antea indicatum ſit, rationem moventis, ad rem mouendam, primo quidem loco eſſe, ut, 56 ad 50: erit ratio, rei movendæ, ad movens, ut, 50 ad 56. ſeu 100 ad 112. Aufertur autem, primò quidem viceſima, inde decima pars hujus; atque ſic in infinitum. Cum ergo, ratio totius parallelepipedi movendi, ad mouentem, ſit, ut, 50 ad 56, vel 100 ad 112; ergo ratio viceſimæ partis erit, ut 5 ad 112: & ratio decimæ, ut 10 ad 112, vel 5 ad 56. Aufer antecedens, rationis 5 ad 112, ab antecedente, rationis 100 ad 112: remanet ratio 95 ad 112. Rurſum, aufer antecedens, rationis 10, ad 112, remanet ratio 90 ad 112. ſeu 45 ad 56. Quoniam vero, id, quod rationi

rei

rei movendæ decedit, rationi moventis adjicitur; ergo ratio moventis ad movendum, fit major; ratio vero rei movendæ ad moventem, fit minor: ſicut quivis per ſe facile perſpicit. Satis tamen clarè, ex hoc ipſo exemplo, ſubtractio rationum intelligitur: tum quoque, quid, noſtris Geometris, ratio dupla, tripla, quadrupla ſit: & contra, ratio ſubdupla, ſubtripla, ſubqvadrupla: & cur ita appelletur.

Atque ita quidem, prima & ſimpliciſſima rationum compoſitio, & diviſio, fit addendo, & ſubtrahendo, antecedentia invicem, conſequenti eodem retento. Altera autem compoſitio & diviſio, fit multiplicando & dividendo antecedentia.

Magnitudo autem, per aliam magnitudinem, multiplicari dicitur: quando, juxta eam rationem augetur, juxta quam, multiplicans aucta eſt, ſeu, quando data parte magnitudinis multiplicantis, ratio magnitudinis multiplicandæ ad factam, fuerit, ut ratio partis datæ ad magnitudinem multiplicantem. Ut, in figura num. V. hujus libri, ſit magnitudo DE multiplicanda per magnitudinem BA. Magnitudo ergo DE: eſt multiplicandum: magnitudo vero AB, multiplicans, cujus pars datur BC ſeu BE. Eſt autem ut BC, ſeu BE ad BA, hoc eſt, ut pars multiplicantis ad multiplicantem, ſic multiplicanda magnitudo, ad factam AE. Si enim BA magnitudo multiplicans, tripla fuerit ipſius BE. ſeu BC. etiam EA tripla erit ipſius DE: & vice verſa, qualiscunque pars BE fuerit ipſius AC, talis etiam DE erit pars ipſius EA. Quod

Digitized by Google

autem antea indicavi, id heic quoque obſervandum eſt, partem, me vocare, qvamcunque magnitudinem alia minorem, qvando duæ iſtæ magnitudines invicem comparantur: totum vero, quæ major eſt. eodem modo quo, manus, & pes, & digitus, & brachium, & quæcunque particula carnis, pars corporis appellatur.

Dividi autem magnitudo, per aliam magnitudinem, dicitur, qvando, juxta eam rationem, ſecatur & dividitur, juxta qvam, alia ſecta eſt. Ut in figura num. V. EA magnitudo ſit dividenda, eo modo, qvo AB dividitur per BE ſeu BC: dico, ut AB ad BE, ſic EA ad DE. Scio qvidem, alia methodo, & multiplicationem, & diviſionem magnitudinum, fieri poſſe: verum id noſtram methodum non tollit, neque hanc rationem multiplicationis, aut diviſionis falſi arguit. Hoc ergo ſuppoſito, dico, compoſitionem rationum fieri multiplicando, qvando, unius rationis antecedens, per alterius rationis antecedens, modo nunc à nobis monſtrato, multiplicatur, factumque, cum eodem conſeqvēte, comparatur. Diviſionem autem, qvando, antecedens unius rationis, per alterius rationis antecedens, modo nunc indicato, dividitur: factumque, cum eodem conſeqvente, comparatur.

Sit enim ratio AE ad AB, componenda multiplicando, cum ratione ED ad BC. Multiplico in fig. num. V. antecedens DE per antecedens AE, dicendo, ut, pars data, ipſius AE, hoc eſt, AB, ad AE, ſic DE, ſeu BF, ad qvartum qvæſitum, ſeu GF: retentoque eo-

dem conſeqvente, dico rationem FG ad EB, ſeu BC compoſitam eſſe ex ratione DE ad BE per rationem AE ad AB, idque, multiplicando antecedentia invicem, eòdem conſeqvente retento.

Si vero ratio BA ad AE, dividenda ſit per rationem BC ad DE, divido antecedens BA, per antecedens BC, dicendo, ut DE ad BC, ſic BA ſeu LN ad BN. Unde ratio BN ad AE, erit facta ex ratione BA ad AE, diviſa per rationem BC ad DE. Quod ſi in compoſitione aut diviſione, alteram rationem ſumere voluerimus: idem òbtinebimus. Componatur enim ratio ED ad BC, multiplicando, cum ratione AE ad AB: erit, ut BC ad DE, ſic AE ſeu BM ad OM. adeoque ratio OM ad BA eſt compoſita ex ratione EA ad BA, per rationem DE ad BC. Eſt vero ut OM ad BM, hoc eſt AE, ſic AE ad BA. Sed ut GF ad BF, hoc eſt DE, ſic DE ad BE ſeu BC. ergo componendo, ut, OM ad AB, ſic GF ad BF. adeoque ratio ex utraque compoſitione, eadem naſcitur, nempe duplicata.

In diviſione id ipſum contingit, qvod inverſis terminis patet.

Quando autem iisdem antecedentibùs retentis, conſeqventia invicem, dicto modo, multiplicantur: rationes ipſæ dividuntur. qvando autem conſeqventia dividuntur, rationes ipſæ componuntur. Si enim datis rationibus EA ad BA, & DE ad BC. retento antecedente EA, dixerim dividendo, ut DE ad

Digitized by Google

BC, ſic BA, hoc eſt, LN ad NB: ratio facta erit EA ad BN, æqvalis rationi OM ad BA, cum utraq; ratio ſit duplicata ejuſdem rationis. Si vero datis rationibus BA ad EA, & BC ad DE, dixerim multiplicando, ut BA ad EA: ſic DE ſeu BF ad FG, ratio BC ad FG, erit facta dividendo. Cujus rei ratio in promptu eſt. Si enim conſeqventis ratio imminuitur, antecedentis augetur. ſi vero conſeqventis ratio augetur, antecedentis imminuitur & vice verſa. qvod, ex iis, qvæ in exemplo de obeliſco dicta ſunt, plenius intelligitur. Atque ita qvidem omnes qvatuor modi Meibomiani pag. 115. propoſiti hac una methodo expediũtur: qvi quidem malè dicto loco, additionem vocat, qvæ multiplicatio foret dicenda: tum qvoq; multiplicationem cum diviſione confundit, unde omnis ejus error originem habet, de qvo poſtea. Pluribus qvidem hæc illuſtrari poſſent, niſi antea id jam factum eſſet. Jamvero majoris illuſtrationis cauſa, & ut noſtra ſententia rectius percipiatur, breviter tantum omnia repetimus.

Quando ergo duæ rationes æqvales, ſemel invicem multiplicando componuntur: ratio compoſita duplicata Geometris dicitur: qvæ ſi iterum eodem modo cum priore componatur; ratio triplicata appellatur. & ſic qvadruplicata, qvintuplicata. Qvando autem ratio quædam æqvalis, dividitur per aliam rationem æqualem, ratio facta ſubduplicata alterius, dicitur: & ſi hæc iterum per priorem dividatur, ſubtriplicacata: & ſic in infinitum ſubqvadruplicata, ſubqvintuplicata &c. Cum

Digitized by Google

Cum enim illa compoſitio, qvæ fit addendo, plurimum differat ab illa, qvæ fit multiplicando: erretque Meibomius, qvi pag. 115. hæc contra claram demonſtrationem, rerumq; veritatem confundit; idq; absq; omni cauſa: illa qvoq; diviſio, qvæ fit ſubtrahẽdo, longe alia ſit, qvam qvæ fit dividendo: etiam nomina diverſa Mathematici recte adhibent ad diverſas res explicandas ac denotandas. Mirari igitur ſatis neqveo, quid Meibomium moverit, ut tam illiberaliter Clavium aliosque tractaret, qvod hiſce vocibus prædictas res explicuiſſent. Negare qvidem non poteſt, voces duplicatas, triplicatas eſſe probas & omnino Latinas: tum quoque voces Græcas διπλάσιον, τριπλάσιον &c. commode & recte Latinis auribus explicare. Quid ergo deſiderat? Græcos quidem non accuſat, qvi rationes compoſitas, qvas qvidem multiplicando fieri nunc diximus, διπλασίους, τριπλασίους appellarunt. At qværo, num ne voces iſtæ Græce, optime apud Latinos exprimantur per duplicatas & triplicatas. Nemo ſane id negabit, qui Latine Græceque novit, ac plane rudis non fuerit. Sed contendit Meibomius, voces iſtas explicandas eſſe per duplas & triplas. At cur non potius per duplicatas & triplicatas. Græci qvidem, diverſas voces habent, non minus quam Latini. Nam & verba διπλόω, τριπλόω agnoſcunt, quæ Latine per duplare, triplare explicantur: & nomina διπλοῦς, τριπλοῦς, duplus, triplus. διπλασιάζειν vero & τριπλασιάζειν, Latine optime

explicātur per duplicare triplicare, ſicut διπλάσιος τριπλάσιος, per duplicatus triplicatus. Jam vero ratio illa, quæ Græcis διπλασίων τριπλασίων, (ipſo quidem Meibomio judice) recte & bene appellatur: Geometris Latinis, duplicata & triplicata dicitur. Altera autem, qvā illi qvos habemus Græci Geometræ, non denominarunt, (quæ tamen à priori vere diſtingvitur) dupla tripla. Quodnam ergo heic Geometrarum peccatum? quave in re lapſi ſunt? λόγον διπλασίονα, τριπλασίονα, Latine, rationem duplicatam, triplicatam dixerunt. Vere enim λογος διπλασίων eſt ratio duplicata, & τριπλασίων triplicata. At vel ipſo Meibomio judice ratio ex binis rationibus æqvalibus multiplicando compoſita, Græce & qvidem rectè & convenienter vocatur λόγος διπλασίων, & juxta hunc modum τριπλασίων & τετραπλασίων. Cur ergo Latinè loquentibus eadem ratio duplicata triplicatáve dici neqvit: cum διπλασίων τριπλασίων optime ac proprie per duplicata & triplicata exponatur? Hæc ergo cenſura Meibomii eſt plane inepta, ne qvid gravius dicam. Qui enim concedit rationem aliſivam Græce convenienter appellari λόγον διπλασίονα, τριπλασίονα &c. idem concedet illam ipſam rationem Latinè duplicatam ac triplicatam appellari; cum voces duplicata, triplicata Latinæ ſint; & Græcas haſce voces optimè explicent. Fuere qvidem inter recentiores Geometras, qvi rationes multiplicando factas duplas, triplas, quadruplásve, dixerunt: adeoque, ſi hæc Meibomii cenſura vera foret; nihil tamen novi

is inveniſſet, nec quicquam in medium attuliſſet, quod non antea Commandino aliisq; fuiſſet uſurpatum. Ipſe ēim Commādinus, id qvod Euclides vocat λόγον διπλασίονα, Latinè vertit *rationem duplam*. Qvippe, in Elementis Euclideis, nulla alia ratio compoſita occurrit, niſi qvæ fit multiplicando. Qvoniam tamen, alia eſt compoſitio rationis, quæ fit addendo; alia qvæ fit multiplicando: rectius illi Geometræ fecerunt, qvi diſtinctis vocibus, diſtinctas res indicarunt: ac illas, quidem, vocarunt duplas triplásve, has, duplicatas triplicatas. Sive autem cenſura hæc Meibomii approbetur, ſive non: nihil eſt, unde glorietur Meibomius, nihilque, ob quod vel Geometras recentiores in genere carpat, velut novum inventum ignorantibus obtrudat. Si enim neceſſario verum foret, id quod Meibomius dicit, (quamvis ſine ullo argumento) rationes διπλασίους Latine dicendas eſſe *duplas*: neque inventum illud Meibomii eſſet, cum Commandinus aliique ante Meibomium ita ſint loqvuti; neque omnes in genere recentiores arguere, aut erroris inſimulare poſſet; cum Commandinus aliique, quorum hæc ſententia eſt, inter recentiores omnino ſint ponendi. Neminem tamen adeo imperitum fore arbitror, qvi non pervideat; cum duplex ſit rationum compoſitio, una, qvæ fit addendo, altera, multiplicando: qvod etiam diuerſæ res, diuerſis vocibus debeant exprimi: recteque adeo à Geometris,

aliæ rationes duplæ, aliæ duplicatæ appellentur.

CAP. XI.

Alterum vero crimen Meibomii, longe gravius eſt, quod in Theone accuſando committit. Hujus enim ſententiæ & appellationis, qua rationes duplæ & duplicatæ invicem diſtingvuntur, auctorem facit Theonem Alexandrinum, qvem ideo ſatis acerbe perſtringit, cum tamen, nuſquam ab eo probetur, Theonem in hac ſententia fuiſſe: & ſi fuiſſet, omnino recte & accurate eſſet locutus. Sed ut utrumque crimen clarius pateat: ipſa Meibomii verba apponam pag. 99. *Hæc autem omnia, quæ vobis narrode ratioum compoſitione, & de verbis, qvibus illa eſt tradita, nunqvam, inqviebat Euthymius, ſe moturum fuiſſe; niſi falſiſſimum dogma, & qvod maximam errandi anſam aliis præbuit, inde fuiſſet fabricatum. Hac enim denominatorum inter ſe multiplicatione fultus hic Theo Alexandrinus, Geometra alioqvi eximius, qvod ex Commentariis, in Ptolomæi magnam Conſtructionem, videre eſt, adſeruit, triplæ rationis duplam eſſe ſextuplam. Verba ejus ſupra, paginâ 25. v. 28. & pag. 26. v. 18. propoſui, qvæ ex commentariorum libro primo vulgatæ editionis pag. 62. ſunt deſumpta. Hunc ſecuti recentiores, volumina ſua his paralogiſmis impleverunt. Elementa qvoqve tua, Euclide, ad qvæ fuſè, hoc tradidit Clavius, hanc explicationem ferre ſunt coacta. Eucl. Hac narratione percellor, nec qvid dicam, habeo. An*

Theo

Theo, noſter Theo, dixit rationem ſextuplam, eſſe duplam rationis triplæ? adeone rationem jam illo tempore ſine ratione mathematici conſiderarunt? nec Græca verba tum homines intellexerunt, quibus qvæ ratio alterius eſſet dupla, qvæ tripla, & qvadrupla; qvæ ſesqvialtera eſſet ratio alterius rationis, & ſupertertia, & ſuperqvarta, &, ut verbo dicam, qvacunque poſſibili ratione alteram ſuperans, aut ab illa deficiens. THEO. Certè cum ratione hoc adfirmaſſe videbor, ſi demonſtratio mea inſpiciatur: & rerum natura &c. Sed cum hæc verba Meibomii perlego inſignem ipſius temeritatem, mirari ſatis neqveo: qvi non tantum ſine omni ratione aut demonſtratione certa ac ſolida, inſignes magnosque Geometras inſcitiæ & erroris accuſare fuerit auſus, ipſisque doctiſſimis Græcis ſuæ linguæ ignorantiam objicere, ubi nullus tamen error, vel ab his, vel ab illis eſt commiſſus: verum etiam tam ſplendide Lectori imponere, idque de Theone Alexandrino affirmare, ſummáque confidentia aſſeverare, quod verum non eſſe, ipſemet omnino cognitum habebat, ſaltem ignorare non poterat. Equidem quibuſdam mortalium, quos atra bilis commovet, id ſæpiſſime contingere audivi, ut ſe ſolos ſapere arbitrentur, cœteros mortales inſanire. Quod & Marco Meibomio nunc evenire video, & optarem non eveniſſe. Falſiſſimum enim dogma appellat illud, quod omnes ſapientiſſimi Mathematici, qui ea de re verba fecerunt, pro veriſſimo ſemper habuerunt: quodque, om-

omnes homines, ratione præditi, & qui judicium hiſce de rebus ferre valent, hoc eſt, qui earum rerum non rudes ſunt ac imperiti, de quibus ſententiam rogantur, amoremque veritatis habuerint, longe veriſſimum eſſe pronunciabunt: qvod denique ipſemet Meibomius, nullo unquam firmo argumento falſitatis convincere conatus eſt. Ita ſolus homo Meibomius eſt, reliqvi volitant ſicut umbræ. Sed priori capite demonſtravimus, vere compoſitionem illam rationis, quæ fit addendo, diſtingvi ab illa, quæ fit multiplicando: ideoque recte omnino feciſſe Geometras, qui diſtinctis vocibus, diſtinctas res appellarunt; illas quidem duplas, &c; has duplicatas: voceq; duplicata, Græcorum διπλασίονα optimè & feliciter explicuerunt. Quuod autem ait, hoc dogma, aliis maximam errandi anſam præbuiſſe; de eo nihil aliud dico, quàm, quod oporteret nomina iſtorum, qui in errorem fuere inducti, heic propoſuiſſe: ut conſtaret, qvi mortales eſſent, an rudes & rerum Mathematicarum ignari? an vero alii? Si enim Theonem inter hos poſitos velit, plane falſus eſt, ut jam dicam. Quod ſi vel ipſe, vel alii, rudes ac imperiti rerum Geometricarum, hac in re lapſi ſunt: id huic dogmati vitio verti non debet. Ipſemet enim antea didiciſſe debebat, quam alios docere occiperet, qvæ non intelligit. Verum iſta omnia in hominem cadunt. errare enim humanum eſt. Quod autem crimen falſi committit, idque Theoni tribuit qvod non dixit,

Digitized by Google

dixit, tantum ut maledicendi anſam habeat: id vero quale ſit, qvivis judicet. Dicit enim, Theonem Alexandrinum rationem ſextuplam vocare duplam rationis triplæ: ideoque, tùm mathematicos rationem, ſine ratione, conſideraſſe. At vero ſi hoc Theo dixiſſet, qvid ea in re peccaſſet? Nihil ſane. Sed non dixit. Verba ejus quæ ipſemet pro ſe citat Meibomius inſpiciamus pag. 25. v. 28. & pag. 26. v. 18. Ἐπειδὴ ἐὰν τὸ τριπλάσιόν τινος διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον, *qvoniam, ſi triplum alicujus duplicaverimus, fiet ipſius ſextuplum.* Ἐὰν γὰρ τὸ ἥμισύ τινος τριπλασιάσωμεν, ἕξει αὐτὸ ἅπαξ καὶ ἡμισάκις. *Si enim dimidium alicujus triplicaverimus, habebimus ipſum ſemel & dimidium.* Sed rogo te Meibomi, qva de re loquitur Theo? non'ne de magnitudinibus, de lineis ΑΒ. ΓΔ. ΕΖ? Non'ne hæc verba illius integra ſunt. Ἐχέτω γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγον δεδομένον, οἷον διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, ἤ τινα ἄλλον, καὶ τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΖ καὶ αὐτὸ δεδομένον· λέγω ὅτι ὁ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΖ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΖ· ἤτοι, ὅτι, ἐὰν ἡ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγου πηλικότης, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΖ λόγου πηλικότητα, ποιεῖ τὴν τοῦ ΑΒ πρὸς ΕΖ. Ἔστω γὰρ πρότερον, τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ μεῖζον, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ ΕΖ· καὶ ἔστω τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ διπλάσιον, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ ΕΖ τριπλάσιον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΓΔ τοῦ ΕΖ τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ

ΓΔ διπλάσιον τὸ AB, τὸ ἄρα AB τοῦ EZ ἐστὶ ἑξαπλάσιον, ἐπεὶ καὶ ἐὰν τὸ τριπλάσιόν τινος διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον. Quæ ita verto. *Habeat enim magnitudo* AB *ad magnitudinem* ΓΔ (neque enim τὸ AB & τὸ ΓΔ &c. aliter explicari poſſunt, aut debent, qvam per τὸ μέγεθος AB &c.) *rationem datam, ut duplam, vel triplam, vel aliam qvamcunque: & magnitudo* ΓΔ *ad magnitudinem* EZ. *etiam datam: dico, qvod ratio* AB *ad* EZ *componatur, ex ratione* AB *ad* ΓΔ, *& ratione* ΓΔ *ad* EZ: *vel etiam, ſi qvantitas rationis* AB *ad* ΓΔ *multiplicetur per qvantitatem rationis* ΓΔ *ad* EZ, *qvod tum faciat qvantitatem rationis* AB *ad* EZ. *Sit enim prius* AB *magnitudo major magnitudine* ΓΔ, *& rurſum* ΓΔ *major ipſa* EZ: *& ſit* AB *qvidem dupla ipſius* ΓΔ: ΓΔ *autem tripla ipſius* EZ. *Qvoniam ergo* ΓΔ *tripla eſt ipſius* EZ: *ipſius autem* ΓΔ *dupla ſit* AB: *erit ergo ipſa* AB *ſextupla ipſius* EZ. *Qvandoqvidem ſi triplum alicujus duplicemus, fit ipſius ſextuplum.* Nempe, ſi triplum alicujus lineæ, vel magnitudinis duplicemus: oritur ipſius ſextuplum. Si enim EZ fuerit magnitudo unius pedis; ΓΔ autem trium pedum: ſi dupletur ΓΔ, hoc eſt, ſi AB conſtituatur dupla ipſius BΔ, erit AB ſex pedum: adeoque ſextupla ipſius EZ. Quæ ſane vera ſunt ac longe certiſſima. Non tamen ideo dicit rationem AB ad EZ, eſſe duplam rationis BΔ ad EZ. Hoc ergo eſt purum figmentum Meibomii. Aliud enim eſt, dicere, magnitudinem, qvæ triplæ dupla eſt, ſimplicis eſſe ſextuplam: & aliud, rationem ſextuplam eſſe duplam triplæ. Vera quidem utraque aſſer-

Digitized by Google

aſſertio, ſicut ſuperiore capite probavimus. Ideoq;, ſi id dixiſſet Theo Alexandrinus, nullo modo erraſſet: neque jure, vel à Meibomio, vel ab ullo alio carpi aut accuſari poſſet. Sed id hoc loco non dicit: adeoque falſus eſt Meibomius, qvi id eum heic dicere aſſeverat. Non enim de rationibus hoc pronunciat Theo, ſed de magnitudinibus. Verùm hic quidem error Meibomii utcunque tolerandus foret: qvandoquidem nullius erroris ipſum Theonem inde convincere poſſit. At quem alibi eidem Theoni intentat, majori diligentia erit refutandus; cum earum rerum ignorantiam Theoni objiciat, qvas optime is cognitas habebat. Dicit enim Theonem non cognitam habuiſſe compoſitionem rationum ineffabilium: ſed quod Euclides, in genere de omnibus rationibus propoſuerat, id Theonem de ſolis effabilibus explicuiſſe, adeoque pro voce πηλικότης, qva Euclides uſus eſt, aliam nempe ποσότης ſuppoſuiſſe. Verba ejus pag. 89. ſub perſona Euclidis & Hermotimi prolata adſcribam integra. *EUCL. Hæc non ſine admiratione qvadam Hermotime te narrantem audio. Haud putaſſem, tantum obſcuritatis interpretibus præbiturum fuiſſe vocabulum πηλικότης, qvod ſane eo ſenſu, quo rectè explicavit Euthymius ab omni antiqvitate eſt uſurpatum. Nimirum ex Græcæ literaturæ in Græcis diſciplinis cognoſcendis, neglecta cultura, qvid non ubique errorum eſt enatum. HERMOT. Majore cum admiratione me de altera definitione diſſerentem audies. Nam & clari*

Mathematici, & Græci reprehenſionem incurrent, quorum duos ne ignotos accerſam & obſcuros, hîc præſentes vides Eutocium dico & Theonem. Diſerte enim uterque per rationis πηλικότητα *quantitatem, te intelligere dicit* ποσότητα *quotitatem, ſeu ut ipſi loquuntur numerum denominatorem, à quo ratio denominatur, quod, quale ſit ſuperius narravi.* Sed ut cœtera Meibomii intacta relinqvam, id tantum urgebo, quod diſertè Theonem & Eutocium dicere ait, nempe Euclidem per πηλικότητα λόγου intelligere ποσότητα, vel ut ipſi loqvuntur numerum denominatorem. Ajo autem id nuſqvam Theonem, Eutociúmve dicere: ſed nudam & ſimplicem calumniam eſſe Meibomii. Neque enim verba, qvæ vel ex Theone, vel ex Eutocio ipſemet exſcripſit, qvicqvam tale demonſtrant. Quod ſi dixerit, id tamen inde concludi: ajo eum peſſime argumentari, & qvod majus eſt, vel Theonem Eutociúmve non intellexiſſe, vel peſſima ac plane ſubleſta fide uſum fuiſſe. Quod ut demonſtretur, primùm qvidem proponam, qvid voces ποσότης & πηλικότης Græcis Geometris ac Philoſophis ſignificent. Inde, eodem plane ſenſu has voces Theoni & Eutocio uſurpatas. Denique, ea omnia optime eos intelligere, & accurate explicare, ob qvæ eos reprehendit Meibomius: adeoque hunc vel eos non intelligere, vel peſſima fide agere; qvod ſciens vidensq; bonis auctoribus errorem objiciat, qvem non commiſere. Voces ergo ποσὸν & ποσότης denotant omne quantum finitum & menſurabile, tam qvod ad mag-

magnitudinem, qvam quod ad numerum, & ad pondus refertur. Πηλίκον vero & πηλικότης ſolis quidem magnitudinibus conveniunt, denotant autem omnem magnitudinem, tam commenſurabilem alteri, quam incommenſurabilem. De utroque veterum teſtimonia audienda. Nemo enim Græcam lingvam rectius explicuerit, qvam ex ipſis veteribus Græcis, conſenſuque eorum circa voces. Primus ergo & antiqviſſimus teſtis ſit nobis Archytas Tarentinus celeberrimus ille Pythagoræus, cujus verba apud Simplicium in Categoriis hæc ſunt. Τᾶς ποσότητος διαφοραὶ τρεῖς. Τὸ μὲν γὰρ αὐτᾶς ἐντὶ ἐν ῥοπᾷ, ὡς τὸ τάλαντον. τὸ δὲ ἐν μεγέθει ὡς τὸ δίπαχυ· τὸ δὲ ἐν πλάθει ὡς τὰ δέκα. *Qvantitatis differentiæ tres. Qvædam enim qvantitas in pondere conſiſtit, ut talentum: qvædam vero in magnitudine, ut bicupitale: qvædam vero in multitudine, ut decem.* Ariſtoteles qvoque diligens & in verbis perqvam accuratus ſcriptor voce ποσοῦ, tam continuum qvàm diſcretum qvantum comprehendit. In Categoriis. Τοῦ δὲ ποσοῦ, τὸ μὲν ἐστι διωρισμένον, τὸ δὲ συνεχές. *Qvantitatis* τοῦ ποσοῦ *una ſpecies eſt diſcreta, altera continua.* Ad quem locum egregie Simplicius. Ἐγκαλοῦσι δὲ οἱ περὶ τὸν Λούκιον καὶ Νικόστρατον τῇ διαιρέσει πρῶτον μὲν, ὡς μὴ δεόντως καὶ τὸ μέγεθος ποσὸν λεγούσῃ· πηλίκον γὰρ ἔδει τοῦτο λέγειν, ποσὸν δὲ τὸν ἀριθμόν, τὸ δὲ κοινὸν ἢ ἄλλο τι, ἢ ὁμωνύμως τῷ ἑνὶ τῶν εἰδῶν, ποσὸν καὶ αὐτὸ ὀνομάζειν.

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ κατὰ τὸ πλεῖστον, τὸ μὲν συνεχὲς, πηλίκον, τὸ δὲ διωρισμένον, ποσὸν, ἀλλὰ καὶ ὑπαλλάττει πολλάκις (τὸ γοῦν ὕδωρ, συνεχὲς ὂν, ποσὸν λέγομεν, ἀλλ' οὐ πηλίκον· πολὺ γὰρ, καὶ οὐχὶ μέγα· καὶ τὸν χρόνον ποσὸν λέγομεν) εἰκότως οὔτε δύο πεποίηκε κατηγορίας, τὸ ποσὸν, καὶ τὸ πηλίκον, οὔτε κατὰ τὸ πηλίκον καὶ ποσὸν διεῖλεν, ἀλλὰ κατὰ τὸ συνεχὲς καὶ τὸ διωρισμένον, ἅπερ οὐδέποτε ὑπαλλάττει. *Accuſant vero ſectatores Lucii & Nicoſtrati hanc diviſionem, primùm quidem, quod non convenienter magnitudinem* ποσὸν *vocet: oportebat enim hanc quidem appellare* πηλίκον, *numerum vero* ποσὸν: *commune autem, vel alio quocunque nomine, vel æquivocè tantum, ſeu quod uni ſolùm ſpeciei propriè conveniret, etiam* ποσὸν *nominaſſe. Sed quandoquidem* πηλίκον & ποσὸν, *quamvis utplurimum, illud quidem continuæ quantitati, hoc autem diſcretæ tribuatur; ſæpius tamen ſubalternentur: (aquam enim quantitatem continuam* ποσὸν *dicimus, & non* πηλίκον, *quippe multam non magnam, & tempus* ποσὸν *vocamus) rectè quidem, neque duo diſtincta paædicamenta fecit* ποσὸν & πηλίκον, *quotum & quantum; neque quantitatem juxta* ποσὸν & πηλίκον *diviſit, ſed juxta continuum & diſcretum: utpote quæ nunquam ſubalternantur.* Ex quibus liquet male à Meibomio voces haſce explicari pag. 11. linea 3. Verba ejus hæc ſunt. *Differunt enim Mathematicis* τὸ πηλίκον & τὸ ποσὸν, *quod* τὸ πηλίκον *ad quantitatem, ſeu potius quotitatem continuam referatur.* τὸ ποσὸν *ad diſcretam.* Neque enim τὸ ποσὸν ad ſolam diſcretam quanti-

tita-

titatem refertur, ſed etiam ad continuam; neque πηλικότης qvotitatem proprie magnitudinum exprimit, id enim τὸ ποσὸν facit: ſed qvamcunque magnitudinem indicat, ſive cognita ſit, ſive incognita. Videtur qvidē Nicomachus Geraſenus libro I. Arithmetices hanc Meibomii ſententiam aliquo modo approbare. Poſtquam enim quantitatem in continuam & diſcretam tribuerat, hæc verba ſubjungit, qvæ etiam Meibomius adducit. φαίνεται δὲ, ὅτι οὔτε περὶ ἁπλῶς μέγεθος, οὔτε περὶ ἁπλῶς πλῆθος συςαίη ἄν ποτε ἡ ἐπιςήμη· ἀόριςον γὰρ ἑκάτερον καθ' ἑαυτὸ ἐςι, πλῆθος μὲν ἐπὶ τὸ πλεῖον, μέγεθος δὲ ἐπὶ τὸ ἔλαττον· ἀλλὰ περί τι ἀπ' ἀμφοῖν ἀφωρισμένον ἀπὸ μὲν πλήθους περὶ τὸ ποσὸν, ἀπὸ δὲ μεγέθους περὶ τὸ πηλίκον. *Apparet igitur, qvod ſcientia neque circa magnitudinem ſimpliciter, neque circa multitudinem verſetur: utrumq; enim per ſe indefinitum; multitudo qvidem, qvoad plus; magnitudo vero qvoad minus: ſed circa aliqvid ab utroque abſtractum: nempe circa qvotum* τὸ ποσὸν, *à multitudine: circa qvantum vero* τὸ πηλίκον, *à magnitudine.* Sed non poteſt auctoritas unius Græci, qvique jam ſeneſcente lingva Græca ſcripſit, aliis pluribus optimi ævi ſcriptoribus præferri, apud quos, vox ποσοῦ non tantum diſcretæ, ſed etiam continuæ qvantitati tribuitur. Ut taceam, verba Nicomachi, talem explicationem poſſe admittere, quæ cum aliorum Græcorum mente conveniat. Aquam quidem, qva, nihil magis continuum eſſe, omnes norunt, non ad

ad μέγεθος, ſed ad πλῆθος Græci referunt. Tempus quoque continuam eſſe qvantitatem ſatis liqvet: & tamen ab optimis auctoribus ποσὸν vocatur. Apud Ariſtophanem in Acharnenſibus. Ποσοῦ δὲ τὸν πρῶτον χρόνου ξυνήγαγεν. *Qvanto tempore exercitum collegit.* & apud Homerum Patrem lingvæ Græcæ, ποσσῆμαρ μέμονας κτερεΐζεμεν Ἕλωρα δῖον ad quæ verba Euſtathius ποσσῆμαρ, ἤτοι πόσας ἡμέρας. Sed & de magnitudine, adeoque qvantitate continua proprie dicta uſurpatur apud Ariſtotelem in Problematibus, Sectione qvinta Quæſtione XXV. Διά τι πλεῖον δοκεῖ ἡ ὁδὸς εἶναι ὅταν μὴ εἰδότες, βαδίζωμεν, πόση τις, ἢ ὅταν εἰδότες. *Qvare via longior appareat, cum ignari quanta ſit, ambulamus, qvàm cum gnari?* cauſas autem reddit ἢ ὅτι τὸ εἰδέναι πόσον, τὸ εἰδέναι ἐστὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ. καὶ πλεῖον ἀεὶ τὸ ἀόριστον τοῦ ὡρισμένου. *An quod noſſe qvanta ſit, id ſit noſſe ipſius numerum? Indeterminatum autem ſemper majus appareat determinato.* & paulo poſt. ἔτι τὸ ποσὸν ὡρισμένον, καὶ τὸ ὡρισμένον ποσόν. *Præterea omne* ποσὸν *eſt determinatum, & omne determinatum* ποσόν. Qvæ verba Ariſtotelis optime declarant qvid τὸ ποσὸν ſit? nempe omne qvantum determinatum, ſive ſit continuum, ſive diſcretum. Viam enim qvamcunque in longitudinem menſuratam, ad qvantitatem continuam referri, nemo ignorat. Hæc ergo optime explicant, qvid voces ποσὸν & ποσότης

ipſis

ipſis veteribus Græcis Philoſophis ſignificent, nempe ut antea dixi, omne quantum determinatum, ſive ſit continuum, ſive diſcretum. De voce autem πηλικότης inſignis eſt locus Ptolemæi, ut alios auctores prætercam, qui à Meibomio citantur, eandemque planè ſententiam habent, quam Ptolemæus. Quod enim Nicomachus Geraſenus nonnihil diſſentire videatur: id tanti non eſt. Integrum autem Ptolemei locum apponam, qvamvis longior ſit, ut eo melius vis verbi intelligatur. Extat autem lib. I. Magnæ Syntaxeos capite περὶ τῆς πηλικότητος τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν. *De qvantitate rectarum circulo inſcriptarum*, ad cujus meliorem intellectum ultima verba prioris capitis etiam exſcripſimus. Μέλλοντες δὲ ἄρχεσθαι τῶν κατὰ μέρος ἀποδείξεων, ὧν πρώτην ὑπάρχειν ἡγούμεθα, δι' ἧς ἡ μεταξὺ τῶν προειρημένων πόλων περιφέρεια, τοῦ δι' αὐτῶν γραφομένου μεγίστου κύκλου πηλίκη τις ἐστι, καταλαμβάνεται, ἀναγκαῖον ὁρῶμεν προθέσθαι τὴν πραγματείαν τῆς πηλικότητος, τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν, ἅπαξ γε μελλήσοντες ἕκαστα γραμμικῶς ἀποδεικνύειν. Πρὸς μὲν οὖν τὴν ἐξ ἑτοίμου χρῆσιν, κανονικήν τινα μετὰ ταῦτα ἔκθεσιν ποιησόμεθα τῆς πηλικότητος αὐτῶν, τὴν μὲν περίμετρον εἰς τξ διελόντες τμήματα· παρατιθέντες δὲ τὰς καθ' ἡμιμοίριον παραυξήσεις τῶν περιφερειῶν ὑποτεινομένας εὐθείας, τουτέστι πόσων εἰσὶ τμημάτων, ὡς τῆς διαμέτρου, διὰ τὸ ἐξ αὐτῶν τῶν ἐπιλογισμῶν φανησόμενον ἐν τοῖς ἀριθμοῖς εὔχρηστον εἰς

ρὲχ τμήματα διῃρημένης. *Sed cum animus nobis ſit particulares demonſtrationes incipere, qvarum primam exiſtimamus eam eſſe, per qvam circumferentià, qvæ eſt inter prædictos polos, qvæque maximi circuli, qvi per prædictos polos deſcribitur, pars qvantacunque eſt, cognoſcitur: neceſſariam arbitramur modum cognoſcendi* πηλικότητας *qvantitates rectarum circulo inſcriptarum primum exponere: ſingula qvidem in lineis demonſtraturi. Ad uſum ergo commodiorem, per tabulas qvasdam,* πηλικότητα *quantitatem illarum expoſuimus, ipſam qvidem circuli peripheriam in partes CCCLX ſecantes: augmentis vero peripheriarum ad ſingulos graduum ſemiſſes, apponentes rectarum, qvæ ipſas ſubtendunt quantitates, hoc eſt, qvot earum partium ſunt, qvarum diameter circuli, propter maximam in numeris commoditatem, (ut ex ſeqventibus rationibus fiet manifeſtum) inſe habet C & XX.* In verbis iſtis παραθέντες δὲ τὰς καθ' ἡμιμόιριον παραυξήσεις τῶν περιφερειῶν ὑπολειπομένας εὐθείας, τουτέστι πόσων εἰσὶ τμημάτων· quædam deſiderari videntur. Vix enim commodum ſenſum habent. Explerem ita ex Theonis commentario, verbis parum immutatis, παρατιθέντες δὲ ταῖς καθ' ἡμιμόιριον παραυξήσεσι τὰς ὑπολειπομένας εὐθείας vel plenius τὰς τῶν ὑποτεινομένων εὐθειῶν πηλικότητας, τουτέστι πόσων εἰσὶ τμημάτων. Atque ita qvidem verti. Id certum eſt πηλικότητας τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν qvantitates rectarum circulo inſcrip-

ſcriptarum, rectè, ſecundum mentem Ptolemæi, explicari per πόσων εἰσὶ τμημάτων *quot ſint partium.* Ipſe enim Ptolemæus, qvi hoc capite πηλικότητας ſeu quantitates, rectarum qvarumcunque, circulo inſcriptarum, vult demonſtrare, primum qvidem docet, qvot partium ſit ſubtenſa ſexaginta graduum, ſeu latus hexagoni circulo inſcripti: inde qvot partium latus ſit quadrati circulo inſcripti, ſeu ſubtenſa graduum nonaginta: poſtea qvot partium ſit latus pentagoni, ſeu ſubtenſa graduum LXXII. & denique latus decagoni ſeu ſubtenſa graduum XXXVI. Unde liquet, demonſtrare πηλικότητας rectarum circulo inſcriptarum, idem eſſe Ptolemæo, ac monſtrare, πόσων εἰσὶ τμημάτων *quot* talium *ſit partium*, qvalium diameter eſt CXX. Qvod ipſum, ex iis, qvæ, ad finem hujus capitis, dicuntur, exque adjunctis tabulis, fit manifeſtum: unde, & ea heic annotavi, ut conſtaret, quid, veteres Mathematici, per πηλικότητα, intellexerint. Ἵνα δὲ, ὡς ἔφην, ἐφ' ἑκάστης τῶν χρειῶν, ἐξ ἑτοίμου, τὰς πηλικότητας ἔχομεν τῶν εὐθειῶν ἐκκειμένας, κανόνια ὑποτάξομεν ἀνὰ στίχους με, διὰ τὸ σύμμετρον, ὧν, τὰ μὲν πρῶτα μέρη, περιέξει τὰς πηλικότητας, τῶν περιφερειῶν, καθ' ἡμιμοίριον παρηυξημένας· τὰ δὲ δεύτερα, τὰς τῶν παρακειμένων ταῖς περιφερείαις εὐθειῶν πηλικότητας, ὡς τῆς διαμέτρου, τῶν ρκ τμημάτων ὑποκειμένης· τὰ δὲ τρίτα, τὸ τριακοστὸν μέρος, τῆς καθ' ἕκαστον ἡμιμοίριον τῶν εὐθει-

εὐθειῶν παραυξήσεως, ἵνα ἔχοντες τὴν τοῦ ἑνὸς ἑξακοσιοστοῦ μέσην ἐπιβολὴν, ἀδιαφοροῦσαν πρὸς αἴσθησιν τῆς ἀκριβοῦς, καὶ τῶν μεταξὺ τοῦ ἡμίσεος μερῶν, ἐξ ἑτοίμου, τὰς ἐπιβαλλούσας πηλικότητας, ἐπιλογίζεσθαι δυνώμεθα. *Ut vero, ad qvemcunque uſum, paratas, ut dixi, quantitates* πηλικότητας *rectarum habeamus: tabulas, verſuum XLV, ſingulas, propter menſuræ commoditatem confecimus, quarum, primus ordo exhibet quantitates* πηλικότητας *peripheriarum, quæ ad dimidium cujusque gradus augentur: alter vero, adjacentium, peripheriis, rectarum, qvantitates* πηλικότητας, *in tot partibus, quot diameter, CXX habere ſupponitur: tertius vero ordo, triceſimam partem augmenti rectarum ad qvosvis dimidios gradus, ut dato unius ſexageſimæ partis exceſſu medio, qui quidem, à vero ſeu accurato, quoad ſenſum, non differt; & cæterarum partium, quæ inter ſemiſſem gradus continentur, excedentes quantitates, ſine labore ſumere liceat.* Subjungitur his tabula, cujus fragmentum appoſuimus.

I. Παραυξ'	II Εὐθειῶν			III Ἑξηκοστῶν			
ϛ'	ȣ'	λ ά	κε	ȣ	α	β	ν
α	α	β	γ	ȣ	α	β	ν
α. ϛ'	α	λ δ	ιε	ȣ	α	β	ν
β	β	ε	μ	ȣ	α	β	ν
β. ϛ	β	λ ζ	δ	ȣ	α	β	μ η
λϛ'.	λζ	δ	νε	ȣ	ȣ	νθ	ν ζ

Digitized by Google

Prima tabula exhibet, τὰς πηλικότητας τ͂ περιφε-ρειῶν καθ' ἡμιμοίριον παρηυξημένας, qvantitates πηλικότητας peripheriarum ad dimidium auctas. Eſt ergo & dimidius gradus, & unus, & duo, & tres, & ſic porro ad 360 gradus πηλικότης qvædam τῆς περιφερείας, ſive circumferentiæ circuli: Πηλικότης quoque rectæ lineæ, circulo inſcriptæ, qvæ unum gradum ſubtendit, eſt partium 1 - 2′. 50″ qvalium Diameter circuli eſt 120. Unde, ſi quæratur qvantitas, ſeu πηλικότης lateris decagoni circulo inſcripti, qvod quidem latus ſubtendit ſemper gradus circuli XXXVI, dico eſſe partium 37. 4′. 55″. talium, qvalium diameter circuli, eſt 120. Recte ergo πηλικότης, in magnitudinibus datis, explicatur per πόσων εἰσὶ τμημάτων *quot ſint partium.* Et demonſtrare magnitudinis cujusdam πηλικότητα, eſt monſtrare πόσων ἐςὶ τμημάτων quot partium ſit. Sic demonſtrare, πηλικότητα magnitudinis decempedalis, eſt, demonſtrare, qvot ſit pedum, nempe decem: qvod ſanè, non minus rectè, dicitur, demonſtrare ipſius ποσὸν ſeu ποσότητα. Adeoque omnis πηλικότης cognoſcitur per τὸ ποσὸν ſeu τὴν ποσότητα. Sic magnitudo AB, in figura num. V. hujus libri, habet qvidem ſuam πηλικότητα, ſed incompertam. Ubi vero ποσότητα ipſius cognoverim, hoc eſt, πόσων τμημάτων ἐςὶ, πόσων ποδῶν, ἢ πήχεων, ἢ ςαδίων *quot partium ſit, nempe quot pedum aut cubitorum, aut ſtadiorum*: jam ipſam qvoque πηλικότητα ipſius cognitam habeo. In omni ergo magnitudine, eſt πηλικότης

quæ tamē non determinatur, niſi per ποσότητα. Ità docet Ptolemæus, quod κ᾽ἂν μὴ πρὸς τὸ καθόλου δύνηται, τὰς πηλικότητας δείξειν, ἐπί γε τῶν οὕτως ἐλαχίστων, τὸ πρὸς τὰς ὡρισμένας ἀπαράλλακτον δύναιτ᾽ ἂν συντηρεῖν, *quamis* πηλικότητας *quantitates tam exilium præſertim partium, vix quiſquam accurate definiverit: nihilo tamen minus, poſſit illud obſervari, quod nulla ſenſibili differentia à definitis diſtet.* Ubi rurſum δείξειν τὰς πηλικότητας eſt ipſorum ποσὸν exhibere, ſeu πόσων εἰσὶ τμημάτων. In qvibus, vero, id, præſtari neqveat, nec τὸ ποσὸν accuratè inveniri, ibi neque τὰς πηλικότητας καθ᾽ ὅλου ὁρίζειν δύνεται, *abſolute qvisquam determinare poteſt.* Πηλικότης ergo juxta hæc denotat omnem qvidem finitam magnitudinem, tam illam, qvæ cognoſci & explicari poteſt, qvàm, qvæ non poteſt. Illa autem πηλικότης cognoſcitur, cujus τὸ ποσὸν ſeu ποσότης habetur, & de qva dici poteſt πόσων ἐστὶ τμημάτων, *qvot ſit partium.* Illa autem πηλικότης, de qva id dici neqvit, & cujus ποσότης cognita non eſt, neque cognoſcitur, neque verbis explicatur. Idipſum, qvod in magnitudinibus ita demonſtravimus, etiam in ipſis rationibus verum eſt. Quæ enim ratio, inter magnitudines incommenſurabiles, fuerit, habet qvidem πηλικότητα, & aliqvam qvantitatem, ſed incompertam. Qvæ autem eſt inter magnitudines commenſurabiles; & ποσότητα habet, & πηλικότητα. Scholium Euclidis à Daſypodio editum, cujus

cujus & Meibomius meminit. Ἐπὶ μὲν τῶν ἀριθμῶν πᾶς λόγος ῥητὴν ἔχει ποσότητα· ἐπὶ δὲ τῶν μεγεθῶν, ἔστι τις λόγος, ὃς οὐ δύναται ῥηθῆναι ἀριθμῷ. Ἔστι γάρ τινα ὧν μόνη μὲν γινώσκεται, ἡ πρὸς τὸ ἕτερον ὑπεροχή, ἡ δὲ ποσότης ἐστὶν ἄγνωστος. Ταῦτα τοίνυν λόγον λέγεται ἔχειν τῆς ὑπεροχῆς, οὐκέτι δὲ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, τουτέστι ῥητόν. Καὶ διὰ τοῦτο προσέθηκεν ἐν τῷ ὁρισμῷ τοῦ λόγου τῶν μεγεθῶν, τὸ κατὰ πηλικότητα. ὁ μὲν γὰρ ῥητὸς, καὶ κατὰ πηλικότητα, καὶ κατὰ ποσότητα ἐστίν· οὐ πάντως δὲ ὁ κατὰ πηλικότητα καὶ ῥητός. *In numeris quidem, omnis ratio, quantitatem effabilem, habet: in magnitudinibus verò, ratio quædam eſt, quæ numeris explicari neqvit. Sunt enim qvædam magnitudines, qvarum ſolus exceſſus cognoſcitur: qvantitas vero ignota eſt. Hæ ergo rationem habere dicuntur exceſſûs, non vero, qvem numerus ad numerum, hoc eſt effabilem. Et propter hoc, etiam in definitione rationis magnitudinum, adpoſuit,* κατὰ πηλικότητα. *Effabilis enim ratio & eſt* κατὰ πηλικότητα & κατὰ ποσότητα: *ſed non omnis ratio quæ eſt* κατὰ πηλικότητα *etiam eſt effabilis.* Verum ergo illud eſt, qvod antea dixi, ποσότητα & πηλικότητα hoc differre, qvòd ποσότης omne qvantum, qvod certam & cognitam menſuram habet, ſub ſe comprehendat: πηλικότης verò, ſolam magnitudinem. Rurſum, πηλικότης omni finitæ magnitudini convenit: ποσότης, tántùm determinatæ & effabili. Atq; hæc communis Geometrarum veterum ſententia, qvam nec Meibomius falſi arguere poteſt, imo ipſemet ſeqvi videtur pag. 86. circa finem, qvamvis antea

pag.

pag. nempe undecima, ποσὸν ſoli diſcretæ qvantitati tribuerit, ut antea indicavimus. Qvoniam ergò, vel ipſo Meibomio fatente, ποσότης omne quantum determinatum ſignificet, ſive continuum ſit, ſive diſcretnm; πηλικότης vero ſolam magnitudinem, eamque tam determinatam, qvam ineffabilem: non illi male Euclidem explicaſſe, aut voces πηλικότητος & ποσότητος confudiſſe ſunt dicendi, qvi cognitæ & determinatæ πηλικότητι, ποσότητα tribuunt: & tamen nihilo ſecius qvascunque rationes, tàm, qvarum ποσὸν datur, qvàm, qvarum τὸ πηλικὸν tantum, rectè componunt. Ait qvidem Meibomius, diſerte, & Theonem & Eutociumaſſerere, Euclidem per πηλικότητα λόγου intellexiſſe ποσότητα: ſed nusqvam id probat. Imo plane falſum eſt. Nusqvam enim illa verba, vel apud Theonem, vel Eutocium invenies. Quin potius Theo, commentario in locum illum Ptolemæi, qvem antea laudavimus, voce πηλικότης ſæpius utitur, ſemper eodem modo qvo Ptolemæus, nempe pro qvantitate rectarum circulo inſcriptarum, aliarúmve magnitudinum, tàm numero explicata, qvam ineffabili. Προαποδείξας οὖν τὰς τῶν ὑποτεινουσῶν τὰς εἰρημένας περιφερείας εὐθειῶν πηλικότητας. *Poſtqvam vero demonſtravit qvantitates rectarum, qvæ dictas peripherias ſubtendunt.* Et ſæpius eodem modo, per totum illud caput. Nec demonſtrari poteſt, Theonem, voce πηλικότης, multitudinem deſignaſſe: multo minus, numerum denominatorem, qvod ait Meibomius. Si enim, vel Theo, vel Eutocius πηλικότητα eo

modo

Digitized by Google

modo explicaſſet: utique, neuter eas rationes compoſuiſſet, in qvibus τὸ ποσὸν ignoratur, ſola πηλικότης datur. At id feciſſe eos, certum eſt. Neque enim ſolas effabiles rationes, hoc eſt, qvarum τὸ ποσὸν datur, compoſuere; ſed etiam ineffabiles, & qvaſcunque. Verum qvidē eſt, effabiles eos rationes ſecundum ποσότητα componere docuiſſe; quod etiam iis verbis indicant, qvæ Meibomius paſſim citat: cum omnis cognita πηλικότης per ποσότητα explicetur. Non tamen ideo πηλικότητα & ποσότητα confuderunt, neque in verbis Euclideis unam vocem pro alia intellexerunt, nempe pro πηλικότης ποσότης: qvandoqvidem, & eas rationes componunt, qvæ nullam habent ποσότητα, ſed ſolam πηλικότητα. Id ex Theone clariſſimum eſt: ut mirari ſatis nequeam, Meibomium, qvi eam ex Theone paginam laudavit, & qvædam his interſperſa recitavit, vel mala fide hæc diſſimulaſſe; vel Theonem non intellexiſſe, tam clare de his differentem. Neq; enim affirmare velim, hæc non eum legiſſe: qvandoqvidem hanc eandem paginam recitet: & ſupina, ne quid dicam gravius, negligentia ſit, locum qvendam ex ſcriptore adducere, & connexionem textus, ſecundum antecedentia & conſequentia non obſervare: & quod peſſimum eſt, optimum ſcriptorem ignorantiæ arguere, earum rerum, qvas eodem loco, quem præ manibus habeo, accuratiſſime tradit. Si enim Theo Euclidem ita explicuiſſet, ut in definitione compoſitionis rationum, per πηλικότητα intellexiſſet numerum denominatorem:

utique, nullam aliam compoſitionem rationum agnoviſſet, qvam illam, qvæ fit per numerum denominatorem: adeoque, nunqvam rationes ineffabiles, in quibus nullus numerus denominator eſt, vel ipſemet compoſuiſſet, vel alios componere docuiſſet. Id ipſum de Eutocio dicendum eſt. At uterque, rationes quascunque non tantùm effabiles, ſed etiam ineffabiles, componi invicem poſſe noverat: adeoque, per πηλικότητα, non numerũ denominatorẽ, ſed qvantitatem, tàm cujus ποσότης datur, qvàm cujus non datur, intellexit. De Theone res clara eſt. Eodem enim in loco ubi earum rationum compoſitionem tradit, qvarum ποσότης datur; etiam illam adducit, qvarum ποσότης non datur. Methodũ enim generalem proponit Theo, qvæ non minus ineffabiliũ qvã effabiliũ rationũ, tam compoſitioni, qvam diviſioni inſervit: qvæ qvidẽ methodus, longe facilior, & magis expedita eſt illa quam Meibomius tam operoſè tradit pagina 98. 99. Quod ut clarius pateat, ipſum Theonem loqventem audiamus, commentario in primum librum magnæ Syntaxeos Ptolomæi pag. 62 63. Ἵνα δὲ ἔτι καταδηλον γένηται τὸ τῆς συνθέσεως τῶν λόγων, διήχθω ἡ ΓΔ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ΔΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΛΓ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐπεὶ, ὁ τῆς ΚΓ παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ΚΘ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΓΔ εὐθείας πρὸς τὴν ΔΘ· ὁ δὲ τοῦ ΓΚ, πρὸς ΚΘ λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λοιπῶν, τουτέστιν, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ

ΓΔ

ΓΔ πρὸς ΔΚ καὶ ἡ ΚΔ πρὸς ΔΘ (τὰ γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν) καὶ ὁ τῆς ΓΔ ἄρα πρὸς ΔΘ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΔ πρός ΔΚ, καὶ τοῦ τῆς ΚΔ πρὸς ΔΘ. Ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΔΚ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ ΔΘ τῇ ΖΕ. Ὁ ἄρα τῆς ΓΔ πρὸς ΕΖ λόγος, τουτέστιν, ὁ τῆς ΓΑ, πρὸς ΑΕ, σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΖ, καὶ τοῦ τῆς ΔΖ πρὸς ΕΖ, τουτέστι τὸ ΖΒ πρὸς ΒΕ. *Ut verò manifeſtum fiat, id qvod de compoſitione rationum proponitur, educatur in figura numero XV. hujus libri* ΓΔ *in* Θ, *& fiat* ΔΘ *æqvalis ipſi* ΕΖ. *Super* Δ *vero punctum erigatur perpendicularis ipſi* ΓΘ, *recta* ΔΚ, *& fiat æqvalis ipſi* ΔΖ. *Claudatur parallelogrammum* ΛΓ: *& qvandoqvidem, ratio parallelogrammi* ΚΓ, *ad parallelogrammum* ΚΘ, *eadem eſt, quæ rectæ* ΓΔ, *ad rectam* ΔΘ; per I. propoſ: VI. Elem. *ratio autem* ΖΚ *parallelogrammi ad parallelogramum* ΚΘ, *componitur ex reliqvis, hoc eſt, ex ratione, qvam habet* ΓΔ *ad* ΔΚ, *&* ΚΔ *ad* ΔΘ. (*Æqviangula enim parallelogramma, rationem habent invicem ex lateribus compoſitam*) per XXIII. VI. Elem. *ratio ergo* ΓΔ *ad* ΔΘ *componitur ex ratione* ΓΔ *ad* ΔΚ, *&* ΔΚ *ad* ΔΘ. *Sed* ΔΚ *æqvatur ipſi* ΔΖ, *&* ΔΘ *æqvatur ipſi* ΖΕ. *Ratio ergo* ΓΔ *ad* ΖΕ, *hoc eſt*, ΓΑ *ad* ΑΕ, *componitur ex ea, qvam habet* ΓΔ *ad* ΔΖ, *&* ΔΖ *ad* ΕΖ, *hoc eſt*, ΖΒ *ad* ΒΕ. Ex his clarum, Theonem Alexandrinum rationes compoſuiſſe, non tantum per numeros, quod poſtea facit; ſed etiam in lineis: neque ſolas effabiles, ſed etiam ineffabiles. Sit enim in figura num XVI.

qvadratum ABCD, cujus diagonalis AC, latus AB. Sit porro aliud qvadratum AEFG, cujus diagonalis ſit AF æqvalis AB lateri qvadrati ABCD. Erit ergo ut AC ad AB, ſic AF, hoc eſt, AB, ad AE. Eſt autem utraque ratio, & AC ad AB, & AB, ſeu AF, ad AE ineffabilis. In qvadratis enim figuris diameter lateri eſt incommenſurabilis per CXVII. Propoſitionem libri X. Elementor. Et tamen, duæ hæ rationes, methodo jam à Theone propoſita, invicem componuntur. Conſtruatur enim CA AB parallelogrammum rectangulum, ipſique CA, in directum jaceat AE: clauſoque parallelogrammo in F, ſit ut BC parallelogrammum, ad AF parallelogrammum; ſic baſis AC ad baſin AE: per I ſexti Element. At BC parallelogrammum, ad AF parallelogrammum habet rationem compoſitam, ex ratione AC ad AB, & ratione AB ad AE. Ergo & AC ad AE, habet rationem compoſitam ex ratione AC ad AB, & ratione AB ad AE: hoc eſt, ratio AC ad AE eſt compoſita ex binis rationibus ineffabilibus AC ad AB, & AB ad AE.

Sed ut clarius pateat, utriusque generis, rationes, juxta Theonis methodum componi poſſe: ea, quæ, paulo poſt proponit, paginâ 36. adducemus. Λέγω δὴ πάλιν, ὅτι καὶ ἐνταῦτα, καθόλου, ἐπὶ τῆς τοιαύτης τάξεως ἡ δεῖξις προχωρεῖ· καὶ πρῶτον, ὅτι ὁ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΕ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΔ πρὸς ΔΑ, καὶ τοῦ τῆς ΑΓ πρὸς ΓΕ. Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΘ·

καὶ διήχθω ἡ ΒΕ ἐπὶ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΕ λόγος, τῆς ΖΘ ἔξωθεν λαμβανομένης, σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΘ, καὶ τοῦ, τῆς ΘΖ, πρὸς ΖΕ· ἀλλὰ τῷ μὲν τῆς ΒΖ πρὸς ΖΘ λόγῳ, ὁ αὐτός ἐστιν ὁ τῆς ΒΔ πρὸς ΔΑ· τῷ δὲ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΕ, ὁ αὐτός ἐστιν ὁ τοῦ ΑΓ πρὸς ΓΕ, διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι τὰ ΑΕΘ, ΖΕΓ, τρίγωνα. ὁ ἄρα τῆς ΒΖ πρὸς ΖΕ λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΔ πρὸς ΔΑ, καὶ τοῦ τῆς ΑΓ πρὸς ΓΕ. *Rurſum autem dico, qvod, hinc demonſtratio, ſecundum eandẽ conſtitutionẽ univerſaliter procedat. Et primùm qvidem, qvod ratio* BZ *ad* ZE, in fig. num. XVII; *componatur ex ratione* BΔ *ad* ΔA, *&* *ratione* AΓ *ad* ΓE. *Ducatur enim* AΘ *parallalela ipſi* ΓΔ *ex puncto* A : *& producatur* BE *in* Θ. *Qvoniam ergo ratio* BZ *ad* ZE, *qvando* ZΘ *media aſſumitur, componatur ex ratione* BZ *ad* ZΘ, *& ratione* ΘZ *ad* ZE; *rationi autem* BZ *ad* ZΘ, *æqvalis qvidem ſit ratio* BΔ *ad* ΔA; *rationi autem* ΘZ *ad* ZE *æqvalis ſit ratio* AΓ *ad* ΓE, *eo qvod triangula* AEΘ *&* ZEΓ *ſint æqviangula: ratio ergo* BZ *ad* ZE *componitur, ex ratione* BΔ *ad* ΔA, *& ratione* AΓ *ad* ΓE.

Atq; hoc qvidem modo, utriusq; generis rationes componuntur, tàm ineffabiles, quam effabiles. Si enim componere velim rationes ineffabiles AC ad AB, & AB ad AE; pono, in figura XVIII, AB æqvalem AC, & EΓ æqvalem AB, figuræ XVI. ductaque recta ex puncto A, nempe AB, ita qvidem diviſâ in Δ, ut AΔ æqvetur ipſi AE figuræ XVI, ΔB autem æqvalis ſit ipſi AB figuræ XVI: jungo BZ & ΔΓ puncta, ductis re-

ctis. Ratio ergo facta multiplicando ex binis rationibus AC ad AB, & AB ad AE, eſt BZ ad ZE. Etenim ratio BZ ad ZE, componitur ex ratione BZ ad ZΘ, & ZΘ ad ZE. Si enim bina parallelogramma rectangula conſtruantur, unum qvidem, ex BZ ZΘ, alterum vero ex ZΘ ZE: erunt quidem inter ſe ut baſes: adeoque, ut parallelogrammum BΘ ad parallelogrammum ΘE: ſic baſis BZ ad baſin ZE. At parallelogramma BΘ & ΘE ſunt in compoſita ratione laterum: ergo & ratio BZ ad ZE habet rationem compoſitam ex ratione BZ ad ZΘ, & ΘZ ad ZE. Sed ut BZ ad ZΘ, ſic BΔ ad ΔA: per II. VI Elementor. & ut ZΘ ad ZE, ſic AΓ ad ΓE: juxta XV. VI. Elementorum. Erit ergo ratio BZ ad ZE, compoſita ex ratione BΔ ad ΔA, hoc eſt, BZ ad ZΘ, & ratione AΓ ad ZE, hoc eſt, ZΘ ad ZE. qvod erat faciundũ. Atq; hoc in plurimis rationũ compoſitionibus eodem modo ſe habet: & ſi illud omne pro compoſitione rationum habendum eſſet, quod Theo & ipſe Meibomius compoſitionem appellant, hæc methodus in omni compoſitione vera foret: ut vere propterea à Theone Alexandrino dictum eſſet, hanc methodum univerſaliter procedere. Sed rationes qvidem defectus hac methodo dividuntur, ut antea indicavimus: alia vero methodo componuntur, qvam poſtea proponemus. Hoc tamen Meibomio non prodeſt: cum is non magis hæc cognita habuerit, qvam ipſe Theo, neque plura in hac doctrina præſtiterit.

De-

Digitized by Google

Demonſtratum ergo, Theonem, compoſitionem rationum, non tantum effabilium, ſed etiam ineffabilium, in lineis tradidiſſe: ideoque, per πηλικότητας, non ποσότητας intellexiſſe aut numerum denominatorem, ſed qvamcunqve qvantitatem magnitudinum, tam numero effabilem, qvam ineffabilem. Adeoque Meibomius, qvi hac in re Theonem accuſat, vel eundem non intellexit, vel mala fide egit, ipſique Lectori imponere voluit. Qvod ipſum, de accuſatione Eutocii dicendum eſt. Qvamvis enim hic rationes numero effabiles, juxta numerorum methodum componat: non tamen hoc, ipſi magis vitio verti debet, qvam Meibomio, qvi plurimis id in locis hoc in libro facit. Si enim Meibomius dicat, ſe non tamen negare compoſitionem rationum ineffabilium: reſpondeo, neque id Eutocium facere: ſed earum etiam meminiſſe. Qui enim, in lineis incompertæ magnitudinis, ponit rationem duplicatam triplicatam &c: is etiam rationes qvaſcunqve effabiles & ineffabiles, componi poſſe indicat. At vero id Eutocium facere, ex commentario ipſius, in VIII. Propoſ. lib. II. Archimedis de Sphæra & Cylindro liqvet. Verba ipſius ſunt. Καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον εἰσὶν αἱ BZ. Γ. E. Δ. ἡ BZ ἄρα πρὸς Δ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ BZ πρὸς Γ. τουτέστιν ἡ Γ. πρὸς E. Ἔχει δὲ καὶ ἡ Γ πρὸς Δ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς Γ πρὸς E. Ἡ ἄρα BZ πρὸς Δ ἡμιόλιον ἔχει λόγον τοῦ τῆς Γ. πρὸς Δ. *Et qvoniam qvatuor rectæ* in fig. XVIII. *continuè ſunt proportionales,*

les, nempe BZ. Γ. E. Δ. *habebit igitur* BZ *ad* Δ *triplicatam rationem ejus, qvam* BZ *habet ad* Γ, *hoc eſt qvam* Γ *habet ad* E. *Habet vero &* Γ *ad* Δ *duplicatam rationem rationis* Γ *ad* E. *Ratio ergo* BZ *ad* Δ *erit ſesqviplicata rationis* Γ *ad* Δ. Rationem duplicatam fieri ex compoſitione duarum æqvalium rationum inter ſe, & triplicatam ex tribus, ne ipſe qvidem Meibomius negaverit. Quamvis enim de vocibus diſputet: rem tamē concedit. Qvoniam ergo, Eutocius non tantum rationis duplicatæ, triplicatæ in datis qvibuſcunqve lineis naturam, ſed; & ſolus forte, inter veteres explicat λόγον ἡμιόλιον *rationem ſeſqvialteram*, qvam ad differentiam ejus qvæ addendo fit ſeſqviplicatam appellavi: non poteſt jure accuſari ignorantiæ in hac doctrina, aut qvod compoſitionem rationum ineffabilium ignoraverit. Imo ſi nihil de his ſcriptum reliqviſſet, non tamen jure hæc ipſi dica ſcribi poſſet: qvandoqvidem, his ipſis verbis, qvæ à Meibomio citantur, & qvibus compoſitionis rationū in numeris meminit, Theonem laudet; qvem dogma hoc tradidiſſe jam antea indicavimus.

Verum ergo id eſt, qvòd antea diximus, Meibomium in Theone & Eutocio accuſandis, vel malâ fide egiſſe, vel illos non legiſſe, vel denique non intellexiſſe.

CAP. XII.

QUoniam vero, qvæ de diviſione rationum, hucuſqve tradidimus, atqve certiſſimis argumentis confirmavimus; principio, cum qvibuſdam definitionibus

bus Euclidis, convenire non poſſe videantur: adeoque ipſemet Euclides falſi, hac in re, à nobis ſit arguendus: paulo accuratius hoc capite de ea re agemus. Antea qvidem diximus, non nobis eſſe propoſitum, Euclidem, ſicubi erraverit, aut παρόραμα quoddam commiſerit, defendere velle: cum ſola nobis veritas curæ ſit cordique; prætereaque de nulla alia re, his in ſtudiis, ſimus ſolliciti. Unde antea præfati ſumus, ſi ex hoc capite, accuſationem contra Ueteres inſtituiſſet Meibomius; neque vera pro falſis rejeciſſet: nullo nos modo ipſi adverſarios futuros. Quoniam vero Meibomius, in hoc eodem cum aliis veteribus Geometris errore hæreat; falſas autē demonſtrationes ex hoc falſo principio exſtruat: videndum, qvid, de antiqvioribus, præſertim de Euclide, ſit dicendum? Theonem enim Alexandrinum, vix excuſare poſſum; qvin heic lapſus dicatur.

Primum igitur ajo, Euclidem, nuſqvam, qvod ego ſciam, diviſionis rationum meminiſſe. Tum qvoq;, de compoſitione, ita alicubi loqvutū; ut potius videatur, compoſitionem & diviſionem rationum invicem confundere; qvàm unam ab altera ullo modo diſtingvere. Qvippe non hodie, neque nuper, id in Euclide animadverſum fuit; ſed ante multa ſecula: eum, non ſemper, tam accuratum in verbis, imò & in demonſtrationibus eſſe; qvin aliquando labatur, humanique aliquid patiatur. de qvo fuſius libro primo à nobis dictum eſt. Sunt tamen, ex qvibus, per bonam con-

Digitized by Google

ſequentiam, ut in ſcholis loqvuntur, id ſeqvi videtur, Euclidem, diviſionem rationum, à compoſitione diſtinxiſſe, ſaltem, juxta proprias aſſertiones diſtingvere debuiſſe: qvamvis claris id verbis, nuſquam, qvod ego ſciam, fecerit. Propoſitionibus enim decimanona & viceſima libri VI. Elementorum, ait, triangula & polygona ſimilia inter ſe, in duplicata ratione eſſe laterum homologorum. Propoſitio: XIX. Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. *Similia triangula ad invicem ſunt in duplicata ratione laterum homologorum* Propoſitione XX Τα ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. *Similia polygona dividuntur in ſimilia triangula, numero æqvalia, & totis ſimilia: & polygonum duplicatam rationem habet ejus, qvam homologum latus, ad latus homologum.* Sic libro XI. Propoſitione triceſima tertia, demonſtrat ſimilia ſolida parallelepipeda, eſſe in triplicata ratione homologorum laterum. Hinc igitur concludo: hoc, qvod ita ſimpliciter affirmat Euclides, abſolutè, & in omnibus, verum non eſt. Æqualia enim & ſimilia, tam triangula, quàm polygona, non in duplicata ſunt ratione ſuorum laterum, ſed in eadem. Ita etiam æqvalia & ſimilia parallelepipeda ſolida, non ſunt in triplicata ratione,

tione, ſuorum laterum: ſed in eadem. Nam, ut, latus ad latus, ſic, parallelepipedum ad parallelepipedum: ſicut ipſe qvoque Euclides id demonſtrat, propoſitione XXXII. ejuſdem libri. Tum ergo hæ propoſitiones veræ erunt, qvando una qvantitas major eſt; altera minor: hoc eſt, qvando unum triangulum vel polygonum, unumve parallelepipedum majus eſt, alterum minus. Tunc enim majus, ad minus, duplicatam, triplicatamve rationem habet rationis laterum homologorum. Primùm ergo, propoſitiones hæ abſolutæ & ſimpliciter veræ non ſunt. Sed neque reciprocè ſumendo veræ ſunt. In figura enim XIX ſit hexagonum majus ABCDEF: minus GHIKLM: utrumque, in ſex triangula ſimilia diviſum: dico, ANB triangulum, ad triangulum GNH, habere rationem duplicatam laterum homologorum: ipſum quoque hexagonum ABCDEF, ad hexagonum GHIKLM, habere rationem duplicatam laterum homologorum. Nempe, majus triangulum, majusve polygonum, ad minus, duplicatam habet rationem laterum. Adeoq; minus ad majus, hoc eſt, triangulum GNH ad ANB, vel hexagonum GHIKLM ad ABCDEF, habet rationem ſubduplicatam laterum. Majus enim & minus ſunt oppoſita. Unde & rationes eorum erunt oppoſitæ: & ſi hæc, duplicata; oppoſita erit ſubduplicata: & ſi hæc triplicata; oppoſita erit ſubtriplicata. Sic ratio cubi θικλμνξ ad cubum αβγδεζη eſt triplicata rationis θλ ad αη. Ideoque ratio cubi αβγδεζη ad

Digitized by Google

cubum θικλμνξ eſt ſubtriplicata rationis αη ad θλ. Qvod, ut rectius percipiatur, ac natura oppoſitorum eo melius perſpiciatur: inſigne fragmentum, nobiliſſimi ſcriptoris Archytæ Tarentini, integrum apponam, qvamvis longiuſculum ſit, cum propter ſummam viri auctoritatem, atque in his rebus peritiam: tum qvod vix qvicquam plenius meliusve ea de re dictum ſit. Ita vero is libro περὶ τῶν ἀντικειμένων differit. Καὶ κατὰ νόμον, καὶ κατὰ φύσιν ἀντικεῖσθαι ἀλλήλοις λέγεται. Τά μὲν ὡς ἐναντία, οἷον ἀγαθὸν κακῷ, καὶ ὑγιὲς κάμνοντι, καὶ ἀληθὲς ψεύδει. Τὰ δὲ, ὡς ἕξις στερήσει, οἷον ζωὰ θανάτῳ, καὶ ὄψις τυφλότητι, καὶ ἐπιστήμα λάθα, Τα δὲ, ὡς πρός τι πῶς ἔχοντα· οἷον, διπλάσιον ἡμίσει, ἄρχον ἀρχομένῳ, καὶ δεσπόζον δεσποζομένῳ. Τὰ δὲ, ὡς κατάφασις καὶ ἀπόφασις· οἷον τὸ ἄνθρωπον ἦμεν, τὸ μὴ ἦμεν, καὶ τὸ σπουδαῖον ἦμεν, τῷ μὴ ἦμεν. Διαφέροντι δὲ ταῦτα ἀλλάλων, ὅτι τὰ μὲν ἐναντία, οὐκ ἀνάγκα ἅμα γίνεσθαι, οὔθ' ἅμα φθείρεσθαι, Ὑγιεία γὰρ νόσῳ ἐναντίον, καὶ ἀρεμία κινήσει. Ἀλλ' οὔτε ὑγιεία νόσῳ συνυπάρχει, οὔτε ἀρεμία κινήσει· οὐδὲ μὰν ἅμα γίνεται, οὐδὲ μὰν ἅμα φθείρεται ἑκάτερον αὐτῶν. Ἕξις δὲ γενέσεως, καὶ στέρησις διαφέροντι τούτῳ, ὅτι τὰ μὲν ἐναντία μεταβάλλειν πέφυκεν, οἷον τὸ ὑγιες ἐς τὸ κάμνον, καὶ τὸ κάμνον ἐς τὸ ὑγιὲς, καὶ τὸ ὀξὺ ἐς τὸ βαρὺ, καὶ τὸ βαρὺ ἐς τὸ ὀξύ· ἕξις δὲ καὶ στέρησις οὐκέτι· ἀλλ' ἕξις ἔρχεται μὲν ἐς τὰν

στερη-

Digitized by Google

στέρησιν, στέρεσις οὐκέτι ἔρχεται ἐς τὰν ἕξιν. Τὸ μὲν γὰρ ζῶον θνάσκει· τὸ δὲ γε θνάσκον, οὐδέποκα ζήσει. Ὅλως δὲ ἕξις μὲν ἐντὶ συνοχὰ τῶ κατὰ φύσιν, στέρησις δὲ ἔκλειψις τῶ κατὰ φύσιν. Τὰ δὲ πρός τι, ἅμα ἀνάγκα, καὶ γίνεσθαι καὶ φθείρεσθαι. Ἀδύνατον γὰρ διπλάσιον μὲν ἦμεν, ἡμίσεον δὲ μή· καὶ ἡμίσεον μὲν ἦμεν, διπλάσιον δὲ μή. Καὶ αἴκα τι γίνεται διπλάσιον, ἅμα καὶ ἡμίσεον γίνεται· καὶ αἴκα τι φθείρεται διπλάσιον, ἅμα ἡμίσεον φθείρεται. Κατάφασις δὲ καὶ ἀπόφασις καὶ λόγος εἴδεα μᾶλλον ἐντὶ, καὶ ἀλήθεος καὶ ψεύδεος μᾶλλον ἐντὶ σημαντικά. Τὸ γὰρ ἦμεν ἄνθρωπον, ἀληθές ἐντὶ, ὄκκα ὑπάρχῃ: ψευδὲς δὲ ὄκκα μὴ ὑπάρχῃ. Ὁ δὴ αὐτὸς λόγος, καὶ ἐπὶ τᾶς ἀποφάσιος. Καὶ γὰρ αὐτὰ ἀληθὴς, ἢ ψευδὴς περὶ τὸ πρᾶγμα τὸ σημαινόμενον· ἀληθὴς μὲν, ὄκκα ὑπάρχῃ, ψευδὴς δὲ, ὄκκα μὴ ὑπάρχῃ. Ἔτι ἀγατῶ μὲν καὶ κακῶ μέσον τι, τὸ μήτε ἀγαθὸν, μήτε κακόν· καὶ πόλλω καὶ ὀλίγω τὸ μέτριον· καὶ βραδέος καὶ ταχέος τὸ ἰσοταχές. Ἕξιος, δὲ καὶ στερήσεος οὐδὲν ἐντὶ μέσον. Ζωᾶς τε γὰρ, καὶ θανάτω μεταξὺ οὐδὲν, καὶ ὁράσιος καὶ τυφλότητος· εἰ μή τις λέγοι, τὸ μήπω γενόμενον ζῶον, ἀλλὰ γινόμενον, μεταξὺ ἦμεν ζωᾶς καὶ θανάτω· καὶ τὸ μήπω βλέπον κυνίδιον, μεταξὺ ἦμεν, τῶ τε τυφλῶσθαι καὶ ὀξῆν. Οὕτω δὲ λέγων, κατὰ συμβεβηκὸς ἀποδώσει τὰν μεσότητα, οὐ κατὰ τὸν οἰκεῖον ὅρον τῶν ἐναντιωτάτων. Τὰ δὲ πρός τι ἐπιδέχεται

μεσότητα. Μεταξὺ γὰρ τῶ δεσπόζοντος καὶ δώλω τὸ ἐλεύθερον· καὶ μεταξὺ τῶ μείζονος καὶ μείονος, τὸ ἴσον· καὶ μεταξὺ τῶ πλάτεος καὶ στενῶ τὸ ἐφαρμόζον· καὶ τῶν ἄλλων ἐναντίων εὑρηθήσεταί τι μέσον, ἢ καὶ ὠνομασμένον, ἢ καὶ ἀνώνυμον. Καταφάσιος δὲ μεταξὺ οὐδὲν ἂν εἴη, οἷον, τῶ τε ἦμεν ἄνθρωπον, καὶ τῶ μὴ ἦμεν· καὶ τῶ ἦμεν μουσικόν, τὸ μὴ μουσικόν. Καὶ ὅλως δὲ ἀνάγκα, καταφᾶσαι, ἢ ἀποφᾶσαι, λέγοντα παρά τινος. καταφᾶσαι μὲν, ὄκκα τι εἶναι δηλοῖ, οἷον, ἄνθρωπον, ἵππον· καὶ συνυπάρχοντα τούτῳ, οἷον, ἀνθρώπῳ μὲν, τῶ μουσικῶ ἦμεν, ἵππῳ δὲ, τὸ πολεμιστᾷ· ἀποφᾶσαι δὲ ὄκκα, μὴ ἦμεν τι δαλοῖτο, οἷον, μὴ ἦμεν ἄνθρωπον, ἢ μὴ ἦμεν ἵππον, ἢ μὴ συνύπαρχον τούτῳ, οἷον, μὴ ἦμεν τὸν ἄνθρωπον μουσικὸν, ἢ μὴ ἦμεν τὸν ἵππον πολεμιστάν. Μεταξὺ δέ γε τᾶς καταφάσιος αὐτᾶς καὶ ἀποφάσιος οὐδέν. *Et ſecundum legem, & ſecundum naturam, quædam ſibi invicem opponi dicuntur· alia quidem ut contraria: ſicut bonum, malo; & ſanum, ægro; & verum mendacio: alia vero, ut habitus, privationi; ſicut vita, morti, & viſus, cæcitati, & ſcientia, ignorantiæ: alia vero, ut relationem invicem habentia; ſicut, duplum dimidio, imperans, illi cui imperatur, & dominus, ſervo: alia vero, ut affirmatio & negatio, ſicut hominem eſſe, opponitur, non eſſe, & diligentem eſſe, opponitur, non eſſe. Differunt vero hæc invicem, quod, contraria non neceſſariò ſimul ſint, & ſimul eſſe deſinant. Sanitas enim morbo contraria eſt, & qvies, motui. Sed neque ſani-*

Digitized by Google

ſanitas unà cum morbo exiſtit; neqve qvies, una cum motu: neque alterutrum horum, cum altero ſimul incipit, neque ſimul cum altero eſſe deſinit. Habitus vero exiſtentiæ (in Græco legitur ἕξις δὲ γενέσεως ubi vox γένεσις denotare videtur *fieri* aut *exiſtere*, ut diſtingvatur vòx habitus ab aliis ſignificationibus) *& privatio, hoc differunt: qvod, contraria permutari invicem poſſint: ſicut, ſanitas in ægritudinem; & ægritudo, in ſanitatatem: & acutum, in grave; & grave in acutum. habitus vero & privatio non item: ſed habitus qvidem in privationem mutatur, privatio verò nunqvam in habitum. Etenim, vivens quidem moritur: mortuum verò minimè reviviſcit. Abſolutè autem, habitus eſt poſſeſſio ejus, qvod eſt ſecundum naturam: privatio verò, amiſſio ejus, quod eſt ſecundum naturam. Qvæ autem relationem invicem habent, ſimul neceſſariò & ſunt, & eſſe deſinunt. Impoſſibile enim eſt, duplum qvidem dari, niſi dimidium una detur. Et ſtatim ac duplum eſſe incipit, ſimul & dimidium eſt: & ſtatim ac duplum eſſe deſinit, etiam dimidium eſſe deſinit. Affirmatiò vero & negatio ſermonis potius ſpecies ſunt, ac veritatis & mendàcii indices.* (In Græco legendum arbitror Κατάφασις δὲ καὶ ἀπόφασις λόγω εἴδεα μᾶλλον ἐνὶ &c. & ſic qvoque verti: altera enim lectio ſenſum commodum non habet) *Eſſe enim hominem, verum eſt, quando ita eſt: falſum autem, qvando non eſt. Eadem vero ratio in negatione. Qvippe hæc, vel vera eſt, vel falſa, ſecundum*

rem

rem illam quam denotat: vera quidem, quando, res ita ſe habet: falſa autem, quando non ita ſe habet. Rurſum, bono & malo medium aliquod datur, quod neque bonum eſt, neque malum: plus quoque, & minus, medium habet mediocritatem: & tardius ac celerius, id quod eſt æqualis celeritatis. Habitus vero & privationis nullum datur medium. Inter vitam enim & mortem, nihil eſt medium; ſicut neque, inter cæcitatem & viſum: niſi quis dicat, id, quod nondum natum eſt, ſed nunc naſcitur, medium eſſe inter vitam & mortem: & catellum, qvi nondum videt, inter cæcitatem & viſum medium obtinere. Qui vero ita loquitur, medium dat, ſecundum accidens: non vero ſecundum propriam definitionem contrariorum. Relativa vero medium habent. Inter dominum enim & ſervum medium datur liberum eſſe: & inter majus & minus, æquale: & inter latius & anguſtius, id quod convenit. Cæterorum quoque contrariorum, medium aliquod invenietur, qvod, vel nomen habet, vel nomine caret. Inter affirmationem vero & negationem, medium non datur. Sicut inter illas enunciationes, homo eſt, & homo non eſt, nihil medium datur: aut illud, muſicum eſſe, vel non eſſe. Et abſolutè quidem, aliquid neceſſario vel affirmari dicitur, vel negari de aliquo: affirmari quidem, quando eſſe indicatur, ſicut hominem, eqvum: & qvæ una cum his exiſtunt: ſicut, cum homine qvidem, eſſe muſicum; cum equo verò, eſſe bellatorem: negari verò, quando indicatur quid non ſit: ſicut non eſſe hominem, vel non eſſe eqvum: tum quoque de iis quæ cum his ſint, ut hominem non

non eſſe muſicum, *aut eqvum non eſſe bellatorem. Inter affirmationem vero & negationem nullum eſt mediũ*. Cum vero ex his conſtet, duplum & ſubduplum, & duplicatum ac ſubduplicatum, ex eo genere oppoſitorum eſſe, qvorum uno dato, alterum quoque detur, & uno ſublato, alterum quoque tollatur: manifeſtum eſt, cum triangula, polygonáve majora, habeant ad minora, rationem duplicatam laterum homologorum: etjam minora triangula & polygona, ad majora, rationem habere ſubduplicatam laterum homologorum. Atque eodem modo, cum, parallelepipedum majus, ad ſimile parallelepipedum minus, rationem habeat triplicatam rationis laterum homologorum: etiam minus parallelepipedum, ad majus, rationem habere ſubtriplicatam laterum homologorum. Omnis enim ratio duplicata ponit ſubduplicatam: & omnis ratio triplicata ponit ſubtriplicatam. Nempe, ſi unus terminus comparatorum, duplicatus fuerit; alter ſubduplicatus erit: & ſi unus triplicatus; alter ſubtriplicatus. At, quemadmodum, duplicatum & triplicatum ex multiplicatione fit: ita ſubduplicatum, & ſubtriplicatum fit ex diviſione. Contrariæ enim concluſiones ex contrariis operationibus procedunt, duplicatio qvidem ex multiplicatione, ut jam dictum fuit: ſubduplicatio vero, & ſubtriplicatio ex diviſione. Sicut ergo nulla duplicatio, triplicatióve, ſine multiplicatione peragitur: ita, nulla ſubduplicatio, ſubtriplicatiove ſine diviſione unqvam perfici poteſt.

Digitized by Google

Eodem ergo modo, qvo ratio ANB, ad GNB, vel ABCDEF, ad GHIKLM, eſt facta multiplicando, ex compoſitione rationis AG, ad GN, & AB, ad GH: ratioque θικλμνξ ad αβγδεζ eſt facta triplicando rationem θλ ad αη per ſeipſam: ita etiam, ratio GNH ad ANB, vel GHIKLM ad ABCDEF, fit dividendo rationem GN ad AN per ſeipſam: ratioqve αϐγδεζη ad θικλμνξ fit dividendo bis rationem αη, ad θλ per ſeipſam. Sit enim in eadem figura XIX ut, AN ad GN, ſic GN ad HP. Et rurſum, ut, θλ ad αη, ſic αη ad ρσ, & ρσ ad στ. Ut ergo AN ad HP, ſic ANB triangulum ad GNH triangulum: vel, ut AN ad HP, ſic ABCDEF ad GHIKLM: & vice verſa, ut GNH ad ANB, ſic HP ad AN: vel ut GHIKLM ad ABCDEF, ſic HP ad AN. Ratio autem GNH ad ANB, vel GHIKLM ad ABCDEF eſt ſubduplicata rationis GN ad AN, ut jam demonſtravimus. ergo & ratio HP ad AN, eſt ſubduplicata rationis GN ad AN. At ratio ſubduplicata eſt facta ex diviſione rationis illius in ſe, cujus eſt ſubduplicata: ut jam indicavimus, atque antea plenius expoſuimus. Ratio ergo HP ad AN eſt facta ex diviſione rationis GN ad AN, per rationem GN ad AN. Eodem modo, ratio θλ ad στ, eſt triplicata rationis θλ ad αη. Nam ut θικλμνξ ad αβγϑεζη, ſic θλ ad στ. At θικλμνξ ad αβγδεζ, eſt triplicata rationis θλ ad αη. ergo θλ ad στ, erit triplicata rationis θλ ad αη. Dico vero vice verſa, ut, αβγδεζη ad θικλμνξ, ſic στ ad θλ. Sed ratio αβγδεζη ad θικλμνξ, eſt ſubtriplicata rationis αη ad θλ,

urpo-

utpote, oppoſita rationi θικλμνξ ad αβγδεζη: ergo & ratio στ ad θλ, erit ſubtriplicata rationis αη ad θλ. Ratio vero ſubtriplicata, eſt facta ex iterata diviſione rationis datæ per ſeipſam diviſæ: ratio ergo στ ad θλ, eſt facta ex iterata diviſione rationis αη ad θλ.

Atq; ex his liquet, qvod, qvamvis Euclides, nuſquã, qvod ego ſciam, diviſionis rationum meminerit: per bonam tamen conſeqventiam, illa doctrina, ex ipſius principiis & demonſtrationibus, deducatur ac probetur. Unde etiam patet, qvomodo definitiones X & XI libri qvinti, rationis nempe duplicatæ, triplicatæ, &c. ſint explicandæ: nimirum ſemper de ratione majoris termini ad minorem, non autem vice verſa. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ. *Qvando autem tres magnitudines proportionales fuerint, prima, ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur, ejus qvam habet ad ſecundam. Qvando autem qvatuor magnitudines fuerint proportionales: prima, ad qvartam, triplicatam rationem habere dicitur, ejus qvàm habet ad ſecundam: & ſemper deinceps unâ plus, qvoad proportio proceſſerit.* Nempe ſi in figura XIX, tres lineæ AN. GN. HP fuerint continuè proportionales: erit ratio

AN ad HP, duplicata rationis AN ad GN. ratio autem HP ad AN, ſubduplicata rationis GN ad AN, ut jam fuit demonſtratum; adeoque, & ſubduplicata rationis HP ad GN: cum HP ad GN æqvetur rationi GN ad AN. Eodem modo ratio θλ ad στ, eſt triplicata rationis θλ ad αη: ſumptis qvatuor continuè proportionalibus θλ. αη. ρσ: στ. Ratio autem στ ad θλ eſt ſubtriplicata rationis αη ad θλ, vel στ ad ρσ.

Illud etiam ex his clarum fit, rationem AN ad HP fieri componendo, ex ratione AN ad GN per rationem GN ad HP: adeoque, rationem GN ad HP fieri, dividendo rationem AN ad HP, per ſe: hoc eſt, inveniendo mediam proportionalem inter AN & HP. Sicut enim, AN ad HP, eſt duplicata rationis, GN ad HP: ita, GN ad HP, eſt ſubduplicata rationis AN ad HP.

Ita etiam ratio αη ad ρσ, eſt ſubduplicata rationis θλ ad αη, vel αη ad ρσ: tum quoque ratio ρσ ad στ, ſubtriplicata rationis θλ ad στ, inventa nempe per duas medias proportionales inter θλ & στ. Quod ſi qvinta continuè proportionalis major in eodem ſchemate ſumatur: erit ratio ρσ ad στ, ſubqvadruplicata rationis φχ ad στ, inventa nempe, per tres medias proportionales, inter φχ & στ conſtitutas. Atque hoc modo additis qvotcunque continuè proportionalibus; aut pluribus mediis proportionalibus inventis: ratio exceſſus vel componitur, vel dividitur.

Inver-

Digitized by Google

Inverſa autem methodo, rationes defectus, additis qvotcunque continuè proportionalibus, dividuntur: inventis autem mediis proportionalibus, augentur ac multiplicantur. Ex iis enim, qvæ antea fuere demonſtrata, ratio HP ad AN eſt ſubduplicata rationis GN ad AN, adeoque ratio GN ad AN, vel HP ad GN, eſt duplicata rationis HP ad AN. Sic ϱσ ad θλ, eſt ſubduplicata rationis ϱσ ad αη, ut antea demonſtratum. Unde ratio ϱσ ad αη, eſt duplicata rationis ϱσ ad θλ. & eodem modo στ ad ϱσ, eſt triplicata rationis στ ad θλ.

Ex qvo id etiã intelligitur, quid ratio illa rationis ſit, qvam Archimedes ἡμιόλιον vocat, Latinè ſeſqvialteram: qvæ potius, ad differentiam illius qvæ addendo fit, ſeſqviplicata foret dicenda, & ſic ſeſqvitriplicata & ſeſqviqvadruplicata: novis qvidem vocibus, ſed ad differentiam rerum neceſſariis: qvas tamen ita propono, ut, ſi qvis alias retinendas velit, cum eo diſputare nolim. Nempe, ratio φχ ad ϱσ, eſt triplicata rationis φχ ad θλ: ratio autem φχ ad αη, eſt duplicata rationis φχ ad θλ: ratio ergo φχ ad ϱσ, ſeſqviplicata Græcè ἡμιόλιος *ſeſqvialtera* rationis φχ ad αη. Una enim ratio eſt ut 3, altera ut 2. Sic ratio φχ ad στ, eſt qvadruplicata rationis φχ ad θλ: adeoque, erit duplicata rationis φχ ad αη: ſeſqvitriplicata autem, vel ſi mavis, ſeſqvitertia, rationis φχ ad ϱσ. Ita, ſi in eadem hac figura, ſumantur octo continuè proportionales πυ. ομ. ζν. φε. θδ. αγ. ϱθ. στ. erit qvidem ratio πυ ad στ ſeptuplicata ratio-

Digitized by Google

onis $\pi\upsilon$ ad $o\mu$; ratio autem $\pi\upsilon$ ad $\varrho\beta$ erit ſextuplicata rationis $\pi\upsilon$ ad $o\mu$. unde ratio $\pi\upsilon$ ad $\sigma\tau$ erit ſeſqviſexta; vel ſi mavis ſeſqviſexplicata rationis $\pi\upsilon$ ad $\varrho\beta$. ſunt enim, ut 7 ad 6. Porro ratio $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$ eſt qvintuplicata rationis $\pi\upsilon$ ad $o\mu$, adeoque ſubſeſqviqvintupla, vel ſubſeſqviqvintuplicata rationis $\pi\upsilon$ ad $\varrho\beta$. Ratio enim $\pi\upsilon$ ad $\varrho\beta$ eſt ſextuplicata rationis $\pi\upsilon$ ad $o\mu$. ratio autem $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$ eſt qvintuplicata ejuſdem rationis $\pi\upsilon$ ad $o\mu$, Ergo ratio $\pi\upsilon$ ad $\varrho\beta$ eſt ſeſqviqvintuplicata rationis $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$. & per conſeqvens, ratio $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$, eſt ſubſeſqviqvintuplicata rationis $\pi\upsilon$ ad $\varrho\beta$. Adeoque ratio $\pi\upsilon$ ad $\varrho\beta$, componitur ex ratione $\pi\upsilon$ ad $o\mu$, multiplicata per rationem $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$: vel, ex ratione $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$, multiplicata per rationem $\pi\upsilon$ ad $o\mu$. Eadem vero ratio, $\pi\upsilon$, ad $\varrho\beta$, diviſa per rationem $\pi\upsilon$ ad $o\mu$, dat factam, $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$: & diviſa per $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$, dat factam $\pi\upsilon$ ad $o\mu$.

Qvoniam vero antea demonſtratum fuit, rationem $\phi\epsilon$ ad $\pi\upsilon$, eſſe ſubtriplicatam rationis $o\mu$ ad $\pi\upsilon$; & rationem $\zeta\nu$ ad $\pi\upsilon$, eſſe ſubduplicatam rationis $o\mu$ ad $\pi\upsilon$: erit ergo ratio $o\mu$ ad $\pi\upsilon$ triplicata qvidem rationis $\phi\epsilon$ ad $\pi\upsilon$; duplicata vero rationis $\zeta\nu$ ad $\pi\upsilon$. Et eodem modo, eadem ratio $o\mu$ ad $\pi\upsilon$, erit qvadruplicata rationis $\theta\delta$ ad $\pi\upsilon$, & qvintuplicata rationis $\alpha\gamma$ ad $\pi\upsilon$: & ſic quouſque continue proportionales fuerint ordinatæ. Qvod ex jam demonſtratis liqvet. Erit ergo ratio $o\mu$ ad $\pi\upsilon$, compoſita ex ratione $\zeta\nu$ ad $\pi\upsilon$, & $\zeta\nu$ ad $\pi\upsilon$, ſeu $\theta\delta$ ad $\zeta\nu$. eſt enim $\theta\delta$ ad $\zeta\nu$, æqvalis rationi $\zeta\nu$ ad $\pi\upsilon$. Eodem modo, ratio $o\mu$ ad $\pi\upsilon$, eſt compoſita, ex ratione $\phi\epsilon$ ad $\pi\upsilon$ triplicata,

Digitized by Google

cata, & ex ratione θδ ad πυ qvadruplicata, & ſic in infinitum. Omne autem compoſitum in ea dividitur unde componitur. Ratio ergo ομ ad πυ, in tres æqvales rationes diviſa dat factam, rationem φε ad πυ: & in qvatuor, rationem θδ ad πυ. & ſic in cœteris. Adeoque in rationibus defectus, quo plures continuè proportionales ſumantur, eo magis prima ratio dividitur; quo plures autem medii continuè proportionales habentur: eò magis rationes defectus componuntur. Si enim inter terminos rationis θδ ad πυ unica media proportionalis ſumatur, nempe ζυ; erit ratio ζυ ad πυ, vel θδ ad ζυ duplicata rationis θδ ad πυ. Qvadratum enim ex ζυ, ad qvadratum ex πυ, ſe habet, ut θδ ad πυ. At vero qvadratum ex ζυ, ſeu minus, ad qvadratum ex πυ, ſeu majus, eſt in ſubduplicata ratione laterum. Majus enim qvadratum, ad minus, eſt in ratione duplicata laterum; adeoque minus, qvadratum ad majus, erit in ratione ſubduplicata laterum: hoc eſt, ratio qvadrati ex ζυ, ad qvadratum ex πυ, qvæ eſt ratio θδ ad πυ, eſt ſubduplicata rationis laterum, hoc eſt, rationis ζυ ad πυ. Ratio ergo ζυ ad πυ, eſt compoſita ex ratione θδ ad πυ duplicata. Quod ſi inter φε & πυ, vel alterius cujuſcunque rationis defectûs terminos, ſumatur media proportionalis: ratio prioris termini ad mediam; vel mediæ, ad conſeqvens, erit compoſita ex ipſa ratione defectus datâ duplicatâ. Cujus demonſtratio ex priori dependet. Sive enim inter θδ & πυ, ſive inter φε & πυ, ſumatur media proportionalis;

Digitized by Google

lis; eadem erit demonſtratio, eadem utrobique veritas.

Si vero inter φε & πυ, ſumantur duæ mediæ proportionales, nempe ζν & ομ. erit ratio φε ad ζν, vel ζν ad ομ, vel ομ ad πυ, (hæ enim tres rationes ſunt invicem æquales) triplicata rationis φε ad πυ. Solidus enim cubus ex ομ, ad ſolidum cubum ex πυ, ſe habet, ut, φε ad πυ. Eſt vero cubus ex ομ, ad cubum ex πυ, in ſubtriplicata ratione laterum. Major enim cubus, qvi eſt ex πυ ad minorem ex ομ, eſt in triplicata ratione laterum: ſeu, ut, πυ ad φε, ſic cubus ex πυ, ad cubum ex ομ. Adeoque minor cubus ad majorem erit in ſubtriplicata ratione laterum ομ ad πυ. Eſt vero ratio minoris cubi ad majorem, ut, φε ad πυ. Ergo ratio φε ad πυ, erit ſubtriplicata rationis ομ ad πυ. ideoque ratio ομ ad πυ, triplicata rationis φε ad πυ.

Porro ex priori demonſtratione, ſi inter ζν & πυ ſumatur media proportionalis ομ: erit ratio ομ ad πυ, duplicata rationis ζν ad πυ. Ratio autem ζν ad πυ, antea fuit demonſtrata duplicata eſſe rationis θδ ad πυ. Ergo ratio ομ ad πυ, eſt qvadruplicata rationis θδ ad πυ. Et ſic in infinitum progrediendo, qvo plures medii proportionales inter terminos rationis defectus ſumantur: eo magis ratio illa componitur: & ſi una ſumatur media proportionalis, duplicatur; ſi duæ, triplicatur; ſi tres, qvadruplicatur, & ſic in infinitum. At ratio qvadruplicata, magis eſt compoſita qvam triplicata:

Digitized by Google

cata: & triplicata, magis compoſita, qvàm duplicata, & ſic in cœteris.

Quo plures autem, in rationibus defectûs, continuè proportionales fuerint, eo magis ratio defectûs dividitur. In ratione enim θδ ad φε, ſi ſumatur una continuè proportionalis, nempe ζυ, vel ab altera parte, αγ: erit ratio θδ ad ζυ, vel αγ ad φε, ſubduplicata rationis φε ad ζυ, vel θδ ad φε. Cum enim ratio φε ad ζυ, vel θδ ad φε, ſit duplicata rationis θδ ad ζυ: ut jam fuit demonſtratum: erit etiam huic oppoſita, ratio θδ ad ζυ, ſubduplicata rationis θδ ad φε: adeoque, facta ex æqvali diviſione rationis φε ad ζυ.

Sumptis verò binis continuè proportionalibus, nempe ζυ, & ομ; vel, ab altera parte, ρβ, & αγ: erit ratio θδ, ad ομ, vel ρβ, ad φε, ſubtriplicata rationis θδ ad φε: hoc eſt, φε ad ζυ, vel ζυ ad ομ, &c. Ratio enim ζυ ad ομ, eſt triplicata rationis θδ ad ομ, ut jam antea fuit demonſtratum. Ergo θδ ad ομ, eſt ſubtriplicata rationis ζυ ad ομ. Adeoque ſubtriplicata rationis φε ad ζυ, vel θδ ad φε. Hæ enim rationes ſunt inter ſe æqvales. Qvod ſi adhuc una continuè proportionalis addatur, nempe πυ: erit ratio θδ ad πυ, ſubqvadruplicata rationis ομ ad πυ. Ratio enim ομ ad πυ, eſt qvadruplicata rationis θδ ad πυ: ut jam antea demonſtravimus. Oppoſita ergo huic θδ ad πυ, erit ſubqvadruplicata rationis ομ ad πυ.

In omni ergo rationum compoſitione, id verum eſſe deprehenditur: rationes exceſſûs, componi, ad-

Digitized by Google

jectis continuè proportionalibus; dividi autem, mediis proportionalibus una pluribusve interpoſitis: defectûs verò, rationes, contrario ſe modo habere; & componi qvidem, interpoſitis, unâ, pluribúsve mediis proportionalibus; dividi autem, adjectâ unâ alteráve continuè proportionali. Tum quoqve compoſitionem in rationibus exceſsûs, & diviſionem in rationibus defectûs, non tantùm fieri, qvando nuper inventâ, binis, continuè proportionalis fuerit; ſed etiam, qvando utrâque datâ vel major eſt, vel minor. Cum enim omnes lineæ in infinitum augeri minuique poſſunt; partesque qvæcunque, juxta qvamcunque rationem, addi, demique; etiam linea qvæcunqve, major utrâque datâ, vel minor utrâque datâ, erit una ex continuè proportionalibus. Si enim ratio majoris inventi ad minorem terminum datum, vel minoris inventi ad majorem terminum datum, duplicata non fuerit rationis datæ, ſed major: erit triplicata, vel qvadruplicata, vel decuplicata, vel centuplicata, atq; ſic in infinitum. Et ſi minor fuerit duplicatâ: erit vel ſeſqviplicata, vel ſeſqvitriplicata, vel ſeſqviqvadruplicata, vel qvæcunque alia; ſic qvoque in infinitum progrediendo. In rationibus autem defectûs, eodem modo, ratio inventa, erit ſubduplicata, ſubtriplicata, ſubcentuplicata: vel ſubſeſqviplicata, ſubſeſqvitriplicata, ſubſeſqviqvintuplicata, & ſic porro in infinitum. Quod ſi ne ſic qvidem rationem illam rationis explicare datum fuerit: ad multiplo-ſuper-

par

particulares veniendum erit. Sic inter $\pi\upsilon$ & $\sigma\tau$ ſi media aſſumatur $\rho\beta$ erit ratio $\pi\upsilon$ ad $\sigma\tau$ ſeptuplicata rationis $\rho\beta$ ad $\sigma\tau$. Sumptis enim inter $\pi\upsilon$ & $\sigma\tau$ ſex mediis proportionalibus:erit ratio $\pi\upsilon$ ad $o\mu$, æqvalis rationi $\rho\beta$ ad $\sigma\tau$. Sumpta vero inter $\pi\upsilon$ & $\sigma\tau$, $\alpha\gamma$:erit $\pi\upsilon$ ad $\sigma\tau$. triploſeſqvialtera, vel triploſeſqviplicata rationis $\alpha\gamma$ ad $\sigma\tau$. Sic ratio $\pi\upsilon$ ad $\sigma\tau$ eſt dupliſeſqvitriplicata rationis $\theta\delta$ ad $\sigma\tau$. Ratio autem $\pi\upsilon$ ad $\sigma\tau$ eſt ſupertripartiens rationis $\phi\varepsilon$ ad $\sigma\tau$. His autem contrariæ ſunt rationes defectus,ſuo qvæqve loco ſumptæ. Atque in his qvidem proprias voces invenire non tam facile eſt. Neque ſanè nos de vocibus admodum ſolliciti ſumus: modò, ita ſenſa animi aliis explicata dare poſſimus, ut intelligamur. Id liqvet, qvamcunque mediam, inter alias duas medias datas, aſſumptam, rationem qvidem exceſsûs dividere, defectûs vero rationem componere: qvod fuſè hucuſqve à nobis fuit demonſtratum.

CAP. XIII.

Qvoniam vero ex hac mediarum aſſumptione qvædam analogiæ ſeu proportiones enaſcantur, qvæ Geometricæ nec appellantur, nec ſunt; ne hoc nobis officiat, ulliusve erroris cauſa ſit, paulo accuratius, proportiones haſce explicabimus. Notandum vero eſt, id qvod Græci ἀναλογίαν vocant Latinis proportionem dici; qvam qvidem vocem primus Cicero ita appellavit. Verba enim Platonis ex Timæo,

 δισμῶν

δεσμῶν δ᾽ ὁ κάλλιστος, ὃς ἂν αὑτὸν καὶ τὰ ξυνδούμενα, ὅτι μάλιστα ἓν ποιῇ, τοῦτο δὲ πέφυκεν ἀναλογία κάλλιστα ἀποτελεῖν· ὁπόταν γὰρ ἀριθμῶν τριῶν, εἴτε ὄγκων, εἴτε δυνάμεων, ὡντινωνοῦν ᾖ, τὸ μέσον ὅ, τι περ τὸ πρῶτον πρὸς αὐτὸ, τοῦτο αὐτὸ πρὸς τὸ ἔσχατον· καὶ πάλιν αὖθις, ὅ, τι, τὸ ἔσχατον πρὸς τὸ μέσον, τοῦτο τὸ μέσον πρὸς τὸ πρῶτον· hiſce Latinis expoſuit. *Sed vinculorum id eſſe aptiſſimum atque pulcherrimum, qvod ex ſe, atque de his, qvæ aſtringit, qvam maximè unum efficit. Id optimè aſſeqvitur, qvæ Græce* ἀναλογία, *Latine (audendum eſt enim, qvoniam hæc primum à nobis novantur) comparatio, proportióve dici poteſt. Qvando enim trium vel numerorum, vel figurarum, vel qvorumcunque generum, contingit, ut, qvod medium ſit uti primum proportione, ita id poſtremo comparetur; viciſſimque, ut extremum cum medio, ſic medium cum primo conferatur &c.* Unde liquet primum Ciceronem Græcam hanc vocem per proportionem explicuiſſe. Commandinus autem, aliique, id qvod Græci λόγον vocant, proportionem dixere, retenta Græca voce ἀναλογίας, vel pro illa, alia quadam aſſumpta, quamvis minus Latina, nempe proportionalitate. Mihi tamen rectius feciſſe videntur, qvi λόγον explicuère, per *rationem*: ἀναλογίαν, per *proportionem*: quod & plurimis aliis, atq; inter eos, Finchio noſtro, in Geometria Rotundi, placuiſſe video. Vox vero ἀναλογία apud Platonem, Ariſtotelem, alioſque optimi ævi ſcrip-

Digitized by Google

ſcriptores Græcos, denotat ἰσότητα τῶν λόγων *æqvalitatem rationum*, vel ut Euclides loqvi amat, ὁμοιότητα τῶν λόγων *ſimilitudinem rationum*. Quas vero Euclides ſimiles eſſe ait, illas etiam æquales fatetur. Quæ enim ἀναλογίαν non habent, hoc eſt, quæ juxta Euclidem, ſimiles non ſunt, illas majores minoréſve vocat: unde ſimiles, neque majores erunt, neque minores; ideoque æquales. Theoni autem Smyrnæo ἀναλογία non illam tantum proportionem denotat, quæ vulgo Geometrica appellatur, eſtque duarum rationum æqvalitas: verùm etiam illam, quam vulgo Arithmeticam & Muſicam dicunt. Magnum enim naturæ miraculum eſt, res qvaſcunque ſolidas, ſi juxta certas rationes diviſæ, pulſentur, ſonos edere gratos ingratóſve. Cujus quidem rei, certam demonſtrationem ac regulam, primus Pythagoras inveniſſe traditur. Muſica enim ante ipſum per plurima ſecula inventa & uſurpata fuerat: quod, tam ex ſacris libris, quàm ex omni hiſtoria conſtat. Hoc vero Pythagoræum inventum, ejuſque occaſionem, totamque rei rationem, verbis potius Nicomachi Geraſeni, qvàm meis, recenſebo: ut infælicitas Critica ſeu Grammatica Meibomii, Lectori ab oculos ponatur: & quam malè ſibi conſulat, qui iſta aliis objicit, quorum ipſemet reus eſt. Narrat ergo Nicomachus Geraſenus in Enchiridio Harmonices libr. I. pag. ex editione Meibomii 11. & 12. Pythagoram, fabri officinam ingreſſum, animadvertiſſe, inæqvalis ponderis malleos inæquales & diſſimiles

 ſo-

ſonos edidiſſe, fixoque accuratē palo, chordas, cum his ponderibus, huic applicuiſſe, totamque rem inde perdidiciſſe. ἀπαρτήσας τεσσάρας χορδὰς ὁμόυλους, καὶ ἰσοκώλους, ἰσοπαγεῖς τε καὶ ἰσοστρόφους, ἑκάστην ἀφ' ἑκάστης ἐξήρτησεν, ὁλκὴν προσδήσας ἐκ τοῦ κατώθεν μέρους. Τὰ δὲ μήκη τῶν χορδῶν μηχανησάμενος ἐκ παντὸς ἰσαίτατα, εἶτα κρούων ἀνὰ δύο ἅμα χορδὰς, ἐνάλλαξ, συμφωνίας εὕρισκε τὰς προλεχθείσας, ἄλλην ἐν ἄλλῃ συζυγίᾳ. Τὴν μὲν γὰρ ὑπὸ τοῦ μεγίστου ἐξαρτήματος τεινομένην, πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ μικροτάτου, διὰ πασῶν, φθεγγομένην κατελάμβανεν. Ἦν δὲ ἡ μὲν δώδεκά τινων ὁλκῶν· ἡ δὲ ἕξ. Ἐν διπλασίῳ δὴ λόγῳ ἀπέφαινε τὴν διὰ πασῶν ὅπερ καὶ αὐτὰ βάρη ὑπέφαινε. Τὴν δὲ αὖ μεγίστην πρὸς τὴν παρὰ μικροτάτην, οὖσαν ὀκτὼ ὁλκῶν διὰ πέντε συμφωνοῦσαν· ἔνθεν ταύτην ἀπέφαινεν ἐν ἡμιολίῳ λόγῳ, ἐν ᾧπερ καὶ αἱ ὁλκαὶ ὑπῆρχον πρὸς ἀλλήλας, Πρὸς δὲ τὴν μεθ' ἑαυτὴν μὲν τῷ βάρει, τῶν δὲ λοιπῶν μείζονα, ἔννεα σταθμῶν ὑπάρχουσαν, τὴν διὰ τεσσάρων, ἀναλόγως τοῖς βάρεσι· καὶ ταύτην δὴ ἐπίτριτον ἀνέκαθεν καταλαμβάνετο, ἡμιολίαν τὴν αὐτὴν φύσει ὑπάρχουσαν τῆς μικροτάτης. Τά γὰρ ἔννεα πρὸς τά ἓξ οὕτως ἔχει, ὅνπερ τρόπον, ἡ παρὰ τὴν μικρὰν, ἡ οκτὼ, πρὸς μὲν τὴν ἓξ ἔχουσαν, ἐπιτρίτῳ λόγῳ ἦν· πρὸς δὲ τὴν, τὰ δώδεκα, ἐν ἡμιολίῳ. Τὸ ἄρα μεταξὺ τῆς διαπέντε καὶ τῆς διὰ τεσσάρων, τουτ-

τουτέστι, ᾧ ὑπερέχει ἡ διὰ πέντε τῆς διὰ τεσσάρων, ἐβεβαιοῦτο ἐν ἐπογδόῳ λόγῳ ὑπάρχειν, ἐν ᾧπερ τὰ ἐννέα πρὸς τὰ ὀκτώ. Ἑκατέρων τε ἡ διὰ πασῶν σύστημα ἐλέγετο, ἤτοι τῆς διὰ πέντε καὶ διὰ τεσσάρων ἐν συναφῇ, ὡς ὁ διπλάσιος λόγος ἡμιολίου τε, καὶ ἐπιτρίτου· τοῖον δώδεκα ἐννέα, ἕξ· ἢ ἀναστρόφως, τῆς διὰ τεσσάρων καὶ διὰ πέντε, ὡς τὸ διπλάσιον ἐπιτρίτου τε καὶ ἡμιολίου. οἷον δώδεκα, ἐννέα; ἕξ, ἐν τάξει τοιαύτῃ. Quæ quidem ita vertit Meibomius. *adpendens qvatuor chordas ejuſdem materiæ exiſtentes, tum æqve longas, & æque craſſas, atque æque graves, ſingulis ſingula pondera appendit, alligata ex inferiori parte. Cumque ità chordarum longitudines omnino æqvales effeciſſet, pulſans deinde binas atque binas ſimul chordas alternatim, conſonantias inveniebat ante dictas, aliam in alia combinatione. Namque à maximo pondere tenſam, ad eam, qvæ à minimo, dia paſon ſonantem deprehendit. Erat autem illa duodecim qvarundam librarum: hæc vero ſex. Atque ita in dupla ratione conſtituebat dia paſon conſonantiam, qvam & ipſæ gravitates oſtendebant Rurſus maximam ad juxta minimam, qvæ octo librarum exiſtebat diapente conſonantem invenit. Unde hanc in ratione ſeſqvialtera conſtituit: in qva & ipſæ inter ſe erant libræ: Ad eam rurſus qvæ hanc ſeqvitur, quod ad gravitatem iſtâ minorem, ſed reliqvis majorem, qvæ novem pondo eſſet, ipſam diateſſaron proportionaliter ipſis gravitatibus. Atque hanc ſuperqvartam contra deprehendebat,*

debat , cum naturâ, eadem ſeſquialtera eſſet minimæ. Qvippe novem ad ſex ita habent , qvemadmodum qvæ juxta minimam eſt , octo libras habens, ad eam qvidem, qvæ ſex habet, in ratione erat ſuperqvarta: ſed ad eam, qvæ duodecim in ſeſqvialtera. Qvod itaque eſt inter diapente & diateſſaron, hoc eſt, qvo diapente conſonantia ſuperat diateſſaron, confirmatum eſt, in ſuperoctava eſſe ratione, in qva novem ad octo. Porro diapaſon conſonantia utrorumque ſyſtema dicitur: ſeu ipſius dia teſſaron & diapente, in conjunctione, ut dupla ratio ſyſtema eſt ſeſqvialteræ, & ſupertertiæ, in his numeris: duodecim, octo, ſex: aut contra, ipſius diateſſaron & diapente; ut duplum, ſupertertii & ſeſquialteri, utputa, in tali ordine, duodecim, novem, ſex. In qva ſane verſione plurima ſunt digna quæ carpantur. Verùm ego ea tantum attingam , qvæ præteriri neqveunt. Id ergo quod Nichomachus ἰσοςρόφυς vocat , Meibomius æque graves vertit. Et ne fortè paulo lenius peccaret, mentem auctoris pervertendo, integram illam vocem, probam omnino & bonam, elidendam vult, aliamque intrudi, qvæ ad rem nihil facit. Audi criticam ejus in notis ad hunc locum *pag.* nempe 11. *V.* 25. ἰσοςρόφυς: *Hoc vocabulum malè hic in omnibus codicibus legi puto: Scriberem* ἰσοῤῥόπων *vel* ἰσοςάθμων *æqvilibres , ejuſdem ponderis. Admodum in hoc experimento rectè capiendo circumſpectus fuit Pythagoras. qvippe chordæ ejuſdem debent eſſe 1 materiæ. 2 longitudinis 3 craſſitiei 4 ponderis. Uno horum requiſitorum deficiente reliqva concidunt.*

Sed

Sed videris profecto Meibomi eo modo cenſuram de Muſicis rebus ferre, quo cæcus de coloribus. Si enim Muſicam unquam attigiſſes: non illam tantum qvæ aſſa voce, ut veteres ajunt, ſed quæ chordis perficitur; ignorare non poteras, hæc quatuor in chordis requiri, ut ſint ejuſdem materiæ, æqualis longitudinis, æqualis craſitiei & præterea ἰσοςρόφυς, hoc eſt, *æquè contortas*. Si enim duæ chordæ, ejuſdem materiei, eandem longitudinem & craſſitiem habuerint: etiam æqvalia pondera habebunt: adeoque, ſi juxta tuam cenſuram ſcripſiſſet Nicomachus], ſuperflua poſuiſſet, neceſſariis omiſſis. Duarum enim chordarum, ejuſdem materiæ, longitudinis, & craſſitiei, ſi una magis altera contorqueatur: differentem ſonum edunt: quod, filiis Muſicorum, imò, lippis & tonſoribus notum eſt. Nec quiſquam id ignorat, qvi ſciens videnſque res Muſicas unqvam attigit. Beatum te ſane Criticum! qui ut nobis monſtres, te egregie doctum eſſe, & Græce, & Latine, ac Muſices præterea peritum, auctorem mutilas: & quæ optimè dicta ſunt, evertis, ut vanis tuis meditationibus locus pateat. Si talis Critica admittenda eſt: nihil uſquam, in bonis auctoribus ſani habebimus: omnia corrupta erunt & putida. Sed neque in Latinis felicior es. Qvid enim voces illæ tuæ *ſuperqvartus*, *ſupertertius* & *ſuperoctavus*. Vocem ἐπίτριτος aliqvando vertis *ſuperqvartus*, aliqvando *ſupertertius*. Ergóne hæc eadem tibi ſunt, *ſuperqvartus* & *ſupertertius*?

Digitized by Google

Imò verò, maxime Grammatice, qvi Scaligerum, Kircherum alioſq; omnes Latina vis docere, eorumque heic famam atque exiſtimationem denigrare cupis, revoca nunc tibi in memoriam, aureum illud Delphicum Γνῶθι σεαυτὸν *Noſce teipſum.* Apud quos enim veteres Latinos ſcriptores hæc legiſti? Crediderim, apud eoſdem, ubi voces tuas, *exceſſivas* & *defectivas*, hoc eſt, nuſquam. Tuum enim *nullibi* uſurpare nolim. Eqvidem non tam ridiculus ſum, ut leges optimis ingeniis præſcriptas velim, ne qvicquam publici juris faciant, quod non omne juxta accuratas Grammaticorum præceptiones ſit exactum. Quis enim tam ſtolidè audax eſt, ut optimas meditationes, & publice privatimque utiliſſimas, ideo premi cenſeret, quod mens rebus intenta, minutias haſce vel contempſerit, vel ſanè, tempus iis impendere noluerit? Imò, præter mentem aliqvando quædam verba aliter cecidére. Scio, multos iſta nunc agere, & laureolam in muſtaceo, hac in parte, quærere. Sed qui nucem frangere nequeunt, corticem arrodunt: & qui nihil in rebus ipſis jure carpere poſſunt, in verbis ingenium oſtentant: eo maximè infœlices, quo ſe, quàm maximè fœlices exiſtimant. Si enim ipſimet quicquam haberent, quo ſe doctis, ſapientibuſque viris probare poſſent; haud ad tam vilia deſcenderent. Verùm, cùm Meibomius cenſoriam heic auctoritatem, in alios magnæ eruditionis viros exerceat, quorũ vix umbram attingit; in memoriam illi revocare vole-
bam

bam Catonis illud. *Turpe eſt doctori, cum culpa redarguit ipſum.*

Et quam frigidum illud eſt, quod Scaligero in præfatione libri ſui objicit. Verba ejus integra adſcribam, ut τῦφον hominis videas. *Qvam enim turpe eſt, quod Jos. Scaliger, vir in Græcis & Latinis literis ſummus,* ὀρθογώνιον ὑπὸ ΑΒ. ΒΓ. *interpretatus ſit, Clavium, alioſque, etiam doctos viros, ſeqvendo, rectangulum ſub AB. BC. cum vertendum eſſet, rectangulum ab AB, BC. nempe contentum,* περιεχόμενον. *qvod verbi, brevitatis cauſa, Mathematici omittunt, ut & plerumque vocabulum* ὀρθογώνιον *rectangulum. Sed ad hujuſmodi notanda nunc non deſcendemus. Quod ſi illa, quæ ex antiquis perperam verſa ſunt, etiam à ſolertiſſimo Mathematico, Federico Commandino, Græcæ lingvæ mediocriter perito, examinare vellem: rebus Mathematicis non parvam lucem me allaturum ſperarem.* Sed quæſumus te Marce Meibomii, ne res Mathematicas attingas ulterius. Hoc enim opere tuo, magnas tenebras apud imperitos rerum, veritati offudiſti. Et niſi meliora fuerint, quæ contra Commandinum habes, qvam qvæ contra Joſ. Scaligerum: rectius tibi conſules, ſi tacueris. Aſt qvid haberes? cum hæc tua ſelectiora, nive Schytica frigidiora ſint. Turpe ais eſſe, quod Scaliger ὀρθογώνιον ὑπὸ ΑΒ. ΒΓ. interpretatus ſit, *Rectangulum, ſub AB. BC.* Nempe, ignorabas id, qvod Scaliger, non minus, qvàm Mathematici cognitum habent; aliud Græcis ſcriptoribus eſſe τὸ ὑπὸ

 AB.

Digitized by Google

AB. BΓ. aliud τὸ ἀπὸ AB. Τὸ ὑπὸ AB. BΓ. denotat qvodcunque rectangulum: τὸ ἀπὸ AB. ſolum qvadratum. Ita Euclides Elem. libro X. Propoſitione XXV. & XXVI. Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μέσον ἐστίν. Ὑπὸ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν AB. BΓ. περιεχέσθω ὀρθογώνιον, τὸ AΓ. λέγω, ὅτι τὸ AΓ μέσον ἐστίν. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ AΔ μέσον ἄρα ἐστί. Qvod juxta verba ipſa ita vertendum eſt. *Quod ſub mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis comprehenditur rectangulum, medium eſt. Sub mediis enim longitudine commenſurabilibus rectis lineis* AB BΓ *contineatur rectangulum* AΓ: *dico, quod* AΓ *medium ſit. Deſcribatur enim ab* AB *qvadratum.* AΔ *ergo medium erit.* Eundem uſum harum vocum habes ſeqventi Propoſitione. Brevius autem hæc habentur apud Archimedem, demonſtratione Prop. VIII. libri II. de Sphæra & Cylindro. Verba ſunt ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θζη τοῦ ἀπὸ ζκ. Τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θζη πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ τουτέστιν ἡ ζθ πρὸς ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς κζ, πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. τὸ δὲ ἀπὸ κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζη διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ κζ πρὸς ζη. *Minus ergo id, quod ſub* θζη *eo quod ab* ζκ (comprehenditur). *Id ergo quod ſub* θζη *ad illud, qvod ab* ζκ, *hoc eſt*, ζθ, *ad* ηζ; *minorem habet rationem, qvàm id, qvod ab* κζ, *ad id, qvod ab* ζη. *Qvod vero ab* κζ (comprehenditur) *habet ad illud, qvod ab*

ab ζη, duplicatam rationem, qvam κζ ad ζη· Τὸ ὑπὸ denotat rectangulum qvodcunque: τὸ ἀπὸ ſolum qvadratum. qvod plurimis aliis locis liquet. Scaliger ergo aliique Geometræ, diſtinctas res diſtinctis vocibus explicuere. Neque dubito ſi Grammaticos conſulas, citius concedent, *comprehendi ſub* Latinum eſſe, qvam tuas illas voces, *ſupertertius*, *ſuperoctavus* & *exceſſivas* ac *defectivas*. Imò, qvid ſi dicent *comprehendi ſub* æquè Latinum eſſe, ac *comprehendi ab:* & vel neutrum, apud optimos ſcriptores Latinos exſtare, vel utrumque? Quod ſi hæc, Latinè melius verſa volueris: Commandinus ille, qvem carpis, eleganter qvidem locum Euclidis tranſlatum tibi dabit; ut infœlicem planè illum eſſe oporteat, qvi te interpretem poſt Commandinum deſideret. Sed de his tuis erroribus Meibomi, ipſemet prius eum Grammaticis tranſige: anteqvam viros doctiſſimos, tantæque eruditionis, ut in his minutiis eruditionem nec ponant, nec qværant, leges injuſſus privatuſque præſcribere audeas.

Ut vero ad rem revertamur, deprendit Pythagoras, in omnibus ſonis, duplam tenſionem, ſive in chordis, ſive in tibiis, ſive alio qvocunque inſtrumento factam, ſemper harmoniam dare διὰ πασῶν, ſeu octavam, hoc eſt, qvæ inter *ut* & *ut*, *re* & *re*, *ſol* & *ſol* conſideratur. Seſqvialteram vero tenſionem, harmoniam dare διὰ πέντε ſeu qvintam, *ut ſol*, *re la*. Seſquitertiam autem, harmoniam dare διὰ τεσσάρων, ſeu qvartam, *ut fa*,

 re

reſol, *mila*. Ex diviſione autem rationis ſeſqvialteræ per ſeſqvitertiam, fit ratio ſeſqvioctava. Reductis enim binis rationibus 3 ad 2, ſeu ſeſqvialtera, & 4 ad 3, ſeu ſeſqvitertia, ad commune conſequens, ita ut ſeſqvialtera ſit 9 ad 6, ſeſqvitertia 8 ad 6: ſi 9 ad 6 dividatur per 8 ad 6, facta ratio erit 9 ad 8, ſeu ſeſqvioctava. Inter διὰ τεσσάρων autem & διαπέντε, ſeu qvartam & qvintam, intervallum eſt integrum: amboque toni integri. Ergo pro integro tono ponatur ratio ἐπόγδοος ſeu ſeſqvioctava. Adeoque dato primo tono *ut*, pro ſecundo tono *re*, ſumatur tenſio ἐπόγδοος ſeſqvioctava. ut ſi tenſio prima partium fuerit 192: tenſio pro *re*, erit 216. ratio enim 216 ad 192 eſt, ut, 9 ad 8, ſeu ſeſqvioctava. Rurſum pro integro tono *mi* ſumatur proximè antecedentis tenſionis ſeſqvioctava, hoc eſt, ſumatur tenſio 243 partium talium, qvalium tenſio *re* eſt partium 216. Ratio enim 243 ad 216, eſt, ut 9 ad 8, ſeu ſeſqvioctava. Quod ſi ratio ſeſqvitertia dividatur per rationem duplicatam rationis ſeſqvioctavæ, hoc eſt, per rationem 81 ad 64: habebimus differentiam tenſionis *mi* & *fa*. Nempe reducantur rationes 4 ad 3, ſeu ſeſqvitertia, & ratio 81 ad 64, ſeu duplicata rationis ſeſqvioctavæ, ad commune conſeqvens: erit ergo ratio 256 ad 192 ſeſqvitertia: ratio autem 243 ad 192, duplicata rationis ſeſqvioctavæ, ſeu ut 81 ad 64. Ratio ergo facta ex diviſione rationis 256 ad 192, ſeu ſeſqvitertiæ per ratiouem 87 ad 64, duplicatam rationis ſeſqvioctavæ eſt 256 ad

243:

243 : qvæ multo minor eſt ratione ſeſqvioctava. Ratio enim 273 fere ad 243, eſt ſeſqvioctava. Hanc ergo partem vocarunt Muſici λεῖμμα.

Atq; ex his intelligitur pulcherrimus ille Platonis locus, qvi eſt in Timæo, ſeu libro de Vniverſo: qvem quidem librum, tanti fecit Cicero, ut integrum in Latinam lingvam transfunderet: cujus verſionis inſigne fragmentum adhuc exſtat. Locus autem Platonis hic eſt. Μιγνὺς δὲ μετὰ τῆς οὐσίας, καὶ ἐκ τριῶν ποιησάμενος ἕν, πάλιν ὅλον τοῦτο εἰς μοίρας ὅσας προσῆκε διένειμεν· ἑκάστην δὲ ἔκ τε ταὐτοῦ, καὶ θατέρου, καὶ τῆς οὐσίας μεμιγμένην· ἤρχετο δὲ διαιρεῖν ὧδε. Μίαν ἀφεῖλε τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς μοῖραν· μετὰ δὲ ταύτην ἀφῄρει διπλασίαν ταύτης· τὴν δ' αὖ τρίτην ἡμιολίαν μὲν τῆς δευτέρας, τριπλασίαν δὲ τῆς πρώτης, τετάρτην δὲ, τῆς δευτέρας διπλῆν. Πέμπτην δὲ, τριπλῆν τῆς τρίτης, τὴν δὲ ἕκτην τῆς πρώτης ὀκταπλασίαν. ἑβδόμην δὲ, ἑπτακαιεικοσαπλασίαν τῆς πρώτης. Μετὰ δὲ ταῦτα, ξυνεπλήρωσε τά τε διπλάσια, καὶ τριπλάσια διαστήματα, μοίρας ἔτι ἐκεῖθεν ἀποτέμνων, καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ τούτων, ὥστε ἐν ἑκάστῳ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητας, τὴν μὲν, ταὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην. τὴν δὲ ἴσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην. Ἡμιολίων δὲ διαστάσεων, καὶ ἐπιτρίτων, καὶ ἐπογδόων γενομένων, ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν, ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσι, τῷ τοῦ ἐπογδόου διαστήματι, τὰ ἐπίτριτα πάντα ξυνεπληροῦτο, λείπων

αυ-

Digitized by Google

αὐτῶν ἑκάστου μορίον, τῆς τοῦ μόριου ταύτης διαστάσεως ληφ-θείσης, ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς ὅρους ἓξ καὶ πεντήκοντα καὶ διακοσίων, πρὸς τρία καὶ τετταράκοντα καὶ διακόσια. Quæ qvidem ita Latinè protulit Cicero libro de Univerſo. *permiſcens cum materia, cùm ex tribus effeciſſet unum, ipſum in ea quæ decuit membra partitus eſt. Jam parteis ſingulas ex eodem & altero, & ex materia temperavit. Fuit autem talis illa partitio. Unam principio partem detraxit ex toto: ſecundam autem, primæ partis duplam: deinde tertiam, qvæ eſſet ſecundæ ſeſquialtera, primæ tripla: deinde qvartam, quæ ſecundæ dupla eſſet: qvintam inde, qvæ tertiæ tripla: tum ſextam, octuplam primæ: poſtremo ſeptimam, qvæ ſeptem & viginti partibus antecederet primæ. Deinde inſtituit dupla & tripla intervalla explere, parteis rurſus ex toto diſſecans: qvas intervallis ita locabat, ut in ſingulis eſſent bina media: vix enim audeo dicere medietates, quas Græci* μεσότητας *appellant: ſed quaſi ita dixerim intelligatur: erit enim planius. earum alteram eadem parte præſtantem extremis, eademque ſuperatam: alteram pari numero præſtantem extremis, parique numero ſuperatam. Seſquialteris autem intervallis, & ſeſqvitertiis, & ſeſqvioctavis ſumptis ex his colligationibus in primis intervallis, ſeſquioctavo intervallo, ſeſquitertia omnia explebat, cum particulam ſingulorum relinqveret. Ejus autem particulæ intervallo, habebat numerus ad numerum eandem proportionem comparationemque in extremis, qvam habent*

bent CCLVI. cum CCXLIII. Nempe harmoniam Univerſi explicaturus Plato eandem in toto eſſe exiſtimavit, qv ã in omnibus & ſingulis partibus animadverterat. Et cum omnia ex numero, pondere, ac menſura conſtent; numerus autem omnis, vel par ſit, vel impar: omnia autem corpora, ſuperficiem habeant & ſoliditatem, qvæ per quadrata & cubos optimè explicantur: ex unitate, qvæ tam in ſingulis corporibus, quam in toto conſpicitur, & ex binario, inter pares numeros primo, & ex ternario primo impari numero, horumque qvadratis & cubis, omnium naturam dependere affirmavit. Qvippe, cùm & totum Univerſum unum ſit, & ſingula in hoc univerſo unum: omnia autem ex plurimis corpuſculis componantur, qvæ rurſum ex aliis corpuſculis coagmentantur, partim numero paribus, partim imparibus: coagmentata autem, unum corpus generant, ſuperficie & ſoliditate præditum: corpus ergo hoc natura unum, ex paris & imparis numeri quadratis cubiſque conſtat: adeoque, & duplum habet, & triplum, & qvadruplum, & noncuplum, & octuplum, & vigecuploſeptuplum. Intervalla autem hæc dupla triplaque, eo modo ſunt diſpoſita, & ita inter ſe combinata, ut convenientiam invicem habeant, gratamque harmoniam faciant: qvod experimento, in omnibus corporibus ſumpto demonſtratur. Erunt ergo intervalla hæc medietatibus qvibuſdam harmonicis conjuncta, qvarum quidem una, eadem parte minus extremum excedit, qva

Digitized by Google

ab altero extremo ſuperatur: altera autem medietas eodem numero ab uno extremo ſuperatur, qvo alterum excedit. Ut ſi minus extremum fuerit 6. majus, duplum hujus, erit 12. medietas autem inter duo hæc extrema 8 & 9. Excedit autem octonarius ſenarium tertia parte ſenarii. nempe binario, qvi eſt triens ſenarii: à duodenario autem ſuperatur octonarius qvaternario, qvi eſt triens duodenarii: adeoque octonarius tertia parte ſenarii excedit ſenarium, tertia autem parte duodenarii exceditnr à duodenario: hoc eſt, eadem parte extremorum excedit & exceditur. Novenarius autem excedit ſenarium ternario: exceditur autem à duodenario, etiam ternario, hoc eſt, eodem numero excedit & exceditur. Inter binas autem haſce medietates ratio eſt ἐπόγδοος ſeu ſeſqvioctava. Unde poſitis hiſce binis: cœtera ſpatia ſeſqvioctavis explentur. Adeoque, ſecundus tonus eſt ſeſqvioctavus primi: tertius autem, ſeſqvioctavus ſecundi. Qvartus autem tertii ſeſqvioctavus non eſt: ſed rationem habet in numeris, qvam 256 ad 243. cujus cauſa antea à nobis fuit explicata. Rurſum, inter ſeſqvialteram & duplam, ponitur ſeſqvioctava: & rurſum, hujus ſeſqvioctava. Adeoque, poſito in medio ſeſqvitertio, cœtera omnia ſeſqvioctavis explentur. Id autem in numeris plenius explicatur: ponendo primũ numerũ 384. qvi enim ante ipſum numeri, omnes haſce proportiones non admittunt. Sumatur enim dimidius hujus 192. erit ergo ſonus 384 ad 192 διὰ πασῶν.

Pri-

Primus autem ἐπόγδοος eſt 216 ſeu *re*. Eſt enim 216 ſeſqvioctavus numeri 192. Illius autem ſeſqvioctavus ſeu *mi* eſt 243. Primi autem numeri ſeſqvitertius eſt 256. Græcis διὰ τεσσάρων vulgo *fa*. Hujus autem ſeſqvioctavus, primi vero ſeſqvialter eſt 288, διαπέντε ſeu *ſol*: cujus ſeſqvioctavus eſt 324. *la*. Hujus autem ſeſqvioctavus non datur.

Poſito autem 384 primo numero, erit ſeſqvioctavus, ſeu *re*, 432: & hujus ſeſqvioctavus, ſeu *mi*, 486. & ſeſqvitertius primi, ſeu *fa*, 512. & ſeſqvioctavus hujus, vel primi ſeſqvialter, qvi eſt *ſol*, 576. Græcis διαπέντε: hujuſque ſeſqvioctavus *la* 648. & hujus rurſum ſeſqvioctavus *ſi* 729. denique duplus primi, qvarti vero ſeſqvialter, & qvinti ſeſqvitertius eſt 768 διὰ πασῶν, ſeu octava *ut*. Ob qvam etiam cauſam Timæus Locrus apud Platonem hunc numerum animæ nundi tribuit, primamque vocat: ὡς μὴ ἀγνοεῖν ἐξ ὧν ἡ ψυχὰ καὶ δι᾽ ὧν συνεστάκει, ἂν οὐχ ὑστέραν τᾶς σωματικᾶς οὐσίας συνετάξατο ὁ Θεός, ὥσπερ λέγομες ἄμμες (πρότερον γὰρ τὸ τιμιώτερον καὶ δυνάμει καὶ χρόνῳ) ἀλλὰ πρεσβυτέραν ἐποίει, μίαν ἀφαιρέων τὰν πρώταν, μονάδων οὖσαν τετόρων ποτὶ ὀκτὼ δέκασι, καὶ τρισὶν ἑκατόνταις. *Ut qvidem minimè incognitum eſſe poſſit, ex qvibus, & per qvæ hæc (mundi) anima cónſtituta: qvam, non ultimam ordinavit Deus poſt corpoream iſtam éſſentiam, ut nos affirmamus: (illud enim qvod honoratius eſt, & poteſtate, & tempore prius) ſed antiqviorem creavit, unam hanc primam auferens, qvæ unitatum erat qvatuor,*

& octo præterea denariorum, & trium centenariorum: hoc eſt in numeris CCCLXXXIV. Has autem medietates Theo Smyrnæus certam qvandam ἀναλογίαν ſeu proportionem generare dicit, ab ἀναλογία illa qvam Geometræ conſiderant diverſam. Quem ſecuti poſtea auctores Latini, proportionum varia genera fecerunt, & aliam qvidem vocarunt Geometricam, quando eadem eſt ratio unius extremi ad medium, qvæ, medii ad alterum extremum: aliam Arithmeticam, qvando eodem numero, & majus extremum excedit medium, & medium excedit minus extremum: aliam Muſicam, qvando, eâdem ſui parte, majus extremum excedit medium, qva extremi minoris parte medium excedit minus extremum. Equidem non multis heic diſputabo, an benè & commodè, vel à Theone Smyrnæo, vel ab aliis Geometris, hæ proportiones vocentur? Neque enim de vocibus cum aliqvo contendere voluerim. Sufficit enim nobis, qvod intelligamur. Id tamen indicatum Lectori velim, me qvando proportionem ſimpliciter nomino, ſemper, ex Veterum Geometrarum more, eam intelligere ἀναλογίαν qvæ vulgo Geometrica appellatùr. Et de hac intelligendi ſunt Veteres Geometræ, qvando ἀναλογίαν nominant. Quod, ſi Meibomius diligentius obſervaſſet, aliqvot forte errores vitâſſet, ut jam ſtatim demonſtrabimus.

CAP.

CAP. XIV.

Ex iis autem qvæ hucuſque de compoſitione & diviſione rationum, diligentius atque accuratiùs diſputavimus: hoc inter alia liqvet; auctis antecedentibus qvarumcunque rationum; ipſas rationes augeri: & antecedentibus imminutis; etiam ipſas rationes diminui. Nempè, qvocunque modo, antecedens augetur, eodem retento conſeqvente; ratio ipſa componitur: & qvocunqve modo, antecedens imminuitur; ratio ipſa dividitur. Mutato autem ordine, in ea compoſitione quæ fit multiplicando, ſi conſeqventia diminuantur, antecedente eodem retento; ratio ipſa diminuitur: ſi vero conſeqventia augeantur; ipſa ratio imminuitur. In ratione enim ζυ ad φε ſi antecedens ζυ augeatur, fiatque æqualis ipſi ομ: erit ratio eadem quæ ομ ad φε. At ομ ad φε eſt duplicata rationis ζυ ad φε, adeoque major. Unde aucto antecedente ζυ & æqvali conſtituto ipſi ομ: erit ratio ipſa aucta. Quod ſi in eadem ratione, ζυ ad φε, conſeqvens imminuatur, fiatque æqvale ipſi θδ, erit ratio facta æqvalis rationi ζυ ad θδ. Hæc autem dupla eſt rationis ζυ ad φε, adeoqve major.

Eodem modo in ratione defectûs φε ad ομ, ſi φε antecedens terminus augeatur, fiatque æqvalis ipſi ζυ: erit ratio ζυ ad ομ, duplicata rationis φε ad ομ, ut capite XII. demonſtravimus: adeoque major ratione φε ad ομ. Si vero conſeqvens imminuatur, etiam ratio

Digitized by Google

tio aucta erit. Ut, in ratione φε ad ομ. ſi conſeqvens terminus ομ imminuatur, fiatque æqvalis ipſi ζυ, erit ratio facta æqvalis φε ad ζυ. Eſt vero ratio φε ad ζυ duplicata rationis φε ad ομ. ut demonſtratum fuit cap. *XII.* ergo & ratio facta erit major.

Quod ſi antecedens imminuatur, aut conſeqvens augeatur: ipſa ratio minor fiet. In ratione enim exceſſus ομ ad φε, ſi antecedens terminus ομ imminutus, æqualis fiat ipſi ζυ, erit ratio facta æqvalis rationi ζυ ad φε. Eſt vero ratio ζυ ad φε minor quam ομ ad φε, utpote ejuſdem ſubduplicata. Ergo & facta hoc modo ratio minor erit. Aucto autem conſeqvente φε, & æqvato ipſi ζυ, erit ratio facta æqvalis ομ ad ζυ, qvæ minor eſt ratione ομ ad φε, utpote ipſius ſubduplicata. Hoc ipſum in rationibus defectûs locum habet. In ratione enim φε ad ζυ, ſi antecedens imminuatur, fiatq; æqvale ipſi θδ, erit ratio facta æqvalis rationi θδ ad ζυ, qvæ minor eſt ratione φε ad ζυ, utpote ſubduplicata ejuſdem. Si vero in eadem ratione φε ad ζυ, conſeqvens terminus ζυ augeatur, fiatque ſiqvalis ipſi ομ: ratio facta erit æqualis rationi φε ad ομ, qvæ minor eſt ratione φε ad ζυ, utpote ſubduplicata ejuſdem. Atque hoc in omni antecedentium augmento, conſeqventiúmve decremento; tum qvoqve in omni antecedentium decremento, conſeqventiúmve augmento, eodem modo ſe habet. Id ipſum enim, qvod in ratione duplicata & ſubduplicata contingit, etiam in cœteris omnibus contingit tàm triplicata & ſubtriplicata,

qvam

Digitized by Google

qvam qxadruplicata, ſeſqviplicata, & ſic in infinitum: cujus rei demonſtatio ex capite *XII*. petatur.

Quibus explicatis, facilè intelligitur, qvæ ratio major ſit: & qvæ minor? Nempe, ſi datæ qvæcunque rationes, ad idem conſeqvens reducantur; cujus antecedens majus eſt, illa ratio major: cujus verò antecedens minus eſt, illa ratio minor. Sumantur enim in figurâ *XIX* duæ rationes, ρβ ad φε, & ομ ad πυ, reducanturq; ambæ ad commune conſequens, nēpe φε, ſitq;,ut ομ ad πυ,ſic θδ ad φε erit ergo ratio ρβ ad φε minor qvā θδ ad φε,cum antecedens illius,minus ſit antecedēte hujus:adeoq; ratio ρβ ad φε minor erit ratione ομ ad πυ.

Eſt ergo hæc breviſſima atq; expeditiſſima methodus inveniendi, in datis qvibuſcunque rationibus, quæ inter eas major ſit, & quæ minor. Reducantur ambæ ad idem conſeqvens: & tùm illa ratio minor erit, cujus antecedens minus: illa autem major, cujus antecedens majus. Atque hoc non tantum verum eſt, quando duæ rationes exceſsûs, aut duæ rationes defectûs comparantur invicem: ſed etiam, qvando ratio exceſsûs comparatur cum ratione defectûs, & contra. Eadem enim ratio obtinet, neque minori id evidentia demonſtratur. Cum enim in omnibus rationibus exceſsûs antecedens majus ſit conſequente: in rationibus verò defectûs antecedens minus ſit conſeqvente: ergo reductis binis talibus qvibuſcunque rationibus ad idem conſequens, erit ratio exceſsûs ſemper major ratione defectûs. Eqvidem, quamvis hoc

hoc ipſum per ſe ſatis clarum ſit: alia tamen demonſtratione, id ipſum clarius explicabo. Conſtat ex iis quæ hucuſque fuere demonſtrata, in omnibus rationibus, tam exceſsûs quam defectûs, quo majora fuerint antecedentia, eo majores eſſe rationes: & quo minora fuerint antecedentia, eo minores eſſe rationes. Adeoque, ratio dupla minor eſt qvam tripla, & hæc qvam qvadrupla, Eodem modo, ratio ſubdupla major eſt qvam ſubtripla, & hæc, qvam ſubqvadrupla. Subdupla enim ratio eſt, qvando antecedens conſequentis dimidium fuerit, adeoque, conſequens antecedentis duplum. Subtripla autem, qvando antecedens tertia pars ſeu triens fuerit conſequentis, adeoque conſeqvens triplum antecedentis. Sic in ratione ſubqvadrupla conſeqvens antecedentis eſt qvadruplum. At qvo majus conſeqvens, eodem retento antecedente; eo minor ratio. Subqvadrupla ergo ratio, minor qvam ſubtripla: & hæc, qvam ſubdupla. Sit enim $\phi\chi$ in fig. *XIX* dupla ipſius $\theta\lambda$, tripla autem ipſius $\zeta\nu$, qvadrupla autem ipſius $\alpha\eta$. Ratio ergo $\alpha\eta$ ad $\phi\chi$ minor erit qvam $\zeta\nu$ ad $\phi\chi$: & $\zeta\nu$ ad $\phi\chi$ minor erit qvam $\theta\lambda$ ad $\phi\chi$: cum $\alpha\eta$ antecedens ſit minus qvam $\zeta\nu$, & $\zeta\nu$ antecedens minus qvam $\theta\lambda$. Eſt vero $\alpha\eta$ ad $\phi\chi$ ſubqvadrupla, $\zeta\nu$ autem ad $\phi\chi$ ſubtripla, & denique $\theta\lambda$ ad $\phi\chi$ ſubdupla. Ratio ergo ſubqvadrupla eſt minor qvam ſubtripla, & hæc minor qvam ſubdupla. Atque ſic in infinitum. Comparentur nunc invicem rationes duæ, una exceſsûs, altera defectûs: nempe, tripla cum
ſub-

ſubtripla, & dupla cum ſubdupla, ſeu dimidia. Jam neminem ego adeo mente captum arbitror; ut dimidiam rationem ſeu ſubduplam, dupla majorem dicat: adeoque nec ſubtriplam tripla. Marcus qvidem Meibomius, contra communem mentis intellectum, dimidiam rationem ſeu ſubduplam æqvalem ait eſſe duplæ: majorem autem dicere non audet. Et ſane, qvis mortalium, iſtum hominem ſanâ mente præditum, arbitretur? qvi, dimidium alicujus magnitudinis, ejuſdem, vel æqvalis magnitudinis, duplo, æqvale majúſve diceret. Verum de iſta Meibomii abſurda opinione poſtea agemus. Nunc illud tantum ſupponimus, rationem dimidiam ſeu ſubduplam non eſſe majorem ratione dupla: neque ſubtriplam, majorem tripla, & ſic in infinitum. Dico autem, rationem ſubduplam, neque æqvalem eſſe duplæ: neque ſubtriplam, triplæ. Ideoque, cùm neque æqvalis ſit; neq; major: ergo minor erit. Et ſubtriplam qvidem rationem tripla eſſe minorem, ita demonſtratur. Cum enim ratio ſubdupla, ratione duplâ major non ſit; ſed vel minor, vel ex falsâ Meibomii ſententia eidem æqvalis: erit utique ratio ſubdupla, minor ratione tripla; qvandoqvidem ratio dupla, minor eſt ratione tripla. Atqui ratio ſubtripla, minor eſt ratione ſubdupla: qvandoqvidem, hujus antecedens, ſi ambæ rationes ad commune conſequens reducantur, majus ſit, antecedente alterius. At qvarum rationum antecedentia, reſpectu ejuſdem conſeqventis, ſunt ma-

jora; illæ etiam rationes ſunt majores: & qvarum antecedentia ſunt minora, illæ etiam rationes ſunt minores' ut principio hujus capitis demonſtratum fuit. Ratio ergo ſubtripla, cum minor ſit ratione dupla; etiam minor erit ratione triplâ: cum ſubdupla ratio minor ſit ratione triplâ. Eodem plane modô, ratio ſubdupla demonſtratur, minor eſſe ratione dupla. Sumptis enim binis rationibus, una exceſsûs, altera defectûs, nempe ſeſqvialtera & ſubſeſqvialtera: erit ratio ſeſqvialtera minor ratione duplâ: adeoque, & ſubſeſqvialtera minor erit ratione dupla. Ratio autem ſubdupla, minor eſt ratione ſubſeſqvialterâ; cum hujus antecedens, reſpectu ejuſdem conſeqventis, majus ſit antecedente illius. Ratio ergo ſubdupla, minor eſt ratione duplâ.

Facile ergo ex his perſpicitur: qvid æqualis ratio ſit, & qvæ major, qvæve minor? Nempè, reductis, datis qvibuſcunque binis rationibus, ad idem conſeqvens: ſi antecedentia æqvalia fuerint; erunt rationes æqvales: ſi vero inæqvalia; illa ratio minor, cujus antecedens minus: illa vero major, cujus antecedens majus. Qvod in omnibus omnino rationibus verum eſſe, hucuſque demonſtravimus. Euclides autem, vel ſi mavis Eudoxus (cujus, librum qvintum Elementorum eſſe, auctor ſcholii illius in V. librum teſtatur) aliam plane definitionem rationum æqvalium & inæqvalium nobis dedit; longe qvidem eâ obſcuriorem, qvam propoſuimus: veram tamen ac minime fal-

falſam, prout contra Meibomium nunc monſtrabimus. Et de æqualium qvidem rationum definitione, quas Euclides vel Eudoxus eaſdem vocat, nullam nobis litem movet Meibomius. Quoniam tamen poſterior definitio rationum inæqualium, ſeu majorum minorumque, ex illa debeat explicari: utramque Geometrice demonſtrabimus.

CAP. XV.

Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα κατάλληλα. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλείσθω. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, εἴπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

In eadem ratione, magnitudines eſſe dicuntur, prima ad ſecundam, & tertia ad qvartam, qvando primæ & tertiæ æqvemultiplices, ſecundæ & qvartæ æqvemultiplices, juxta qvamcunque multiplicationem, utraque utrámque, vel una ſuperant, vel una æqvales ſunt, vel

vel una deficiunt inter ſe comparatæ. Qvæ vero, eandem habent rationem, magnitudines, proportionales vocentur. Qvando autem æque multiplicium, multiplex qvidem primæ ſuperaverit multiplicem ſecundæ: multiplex vero tertiæ non ſuperaverit multiplicem qvartæ, tunc prima ad ſecundam majorem rationem habere dicitur, qvam tertia ad quartam. His verbis definitio rationum æqvalium & inæqvalium ab Euclide libro V. Elementorum concipitur. Notandum autem eſt, ea verba, qvæ in priore definitione rationum, nempe, æqvalium ſeu earundem, reperiuntur, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν *juxta qvamcunque multiplicationem*, etjam in poſteriore definitione eſſe repetenda: cum aliàs ipſa definitio nimis ſit anguſta: qvod ipſe quoque Meibomius verum ſupponit. Id vero mirari ſatis nequeo, quid, vel Euclidem, vel Eudoxum moverit, ut definitionis loco hæc ſupponeret: alia vero hinc demonſtraret longè his clariora. Qva qvidem in re ejuſdem criminis accuſari poteſt, cujus in priore libro reum ex Proclo peregimus Apollonium: nempè, quod dum res manifeſtas demonſtrare conatur, ea quæ magis obſcura ſunt, & quorum veritates minus perſpicuæ, cogatur ſupponere. Definitiones enim Geometricæ explicant paucis tantum verbis, iiſque perſpicuis, quid illud ſit quod definimus. Et tales noſtræ ſunt, capite hujus libri VII. *Æqvales rationes dicuntur, qvæ ſe invicem, nec majores ſunt, nec mino-*

minores. Ratio autem, altera ratione major dicitur, quæ æqvalem excedit. Minor vero qvæ ab æqvali deficit. Qvod autem antecedentia æqvalium rationum juxta qvamcunque multiplicationem æquemultiplicata ſimul excedant conſequentium æquemultiplices; inæqvalium vero rationum non item: id demonſtratione qvadam & explicatione ſatis operoſa indiget. Saltem, obſcurius hoc eſt, qvam illud, quod inter propoſitiones V. libri Elementorum demonſtratur, *Æqvalia ad idem eandem habere magnitudinem.* Atque hac qvidem in parte non ab omni culpa liber eſt auctor hujus operis, ſive Euclides is eſt, ſive Eudoxus. Neque tamen hæc movet Meibomius; ſed unam ex hiſce definitionibus falſam eſſe ait, nempe rationum inæqvalium. Eqvidem Euclides ſolam majorem rationem definit: minoris vero naturam ex oppoſito intelligi vult. Quod autem malè falſitatis à Meibomio accuſetur, id nunc demonſtrabimus. Et ut hæc quoque ab Euclide præter leges Geometricas allata certam demonſtrationem habeant: tres haſce Propoſitiones in medium adducam; quæ ſi Geometris placuerint: Euclideis pro explicatione adjungantor.

Propositio I.

Si duæ quæcunque finitæ magnitudines æquemultiplicentur; habebunt earum æquemultiplices eandem inter ſe rationem, qvam magnitudo ad magnitudinem: & multiplum primæ magnitudinis, ad primam magnitudi-

nem, eandem habebit rationem, qvam, multiplum ſecundæ magnitudinis, ad ſecundam.

Sint enim, in diagrammate hujus libri *XX*, AE & AD qvæcunque magnitudines, quæ, æquemultiplicatæ, faciant qvaſcunque magnitudines, v. g. AF & AG, vel AH & AI, vel AK & AL, vel denique AC & AB: dico, ut, AE ad AD, ſic AF ad AG, & AH ad AI, & AK ad AL, & AC ad AB. Vel enim AE, æqvatur ipſi AD, vel non æquatur. Si æquatur: ergo per Axioma VI. libri I. Elem. æquemultiplicia eorum inter ſe erunt æqualia. Eodem enim jure, quo ejuſdem vel æqualium magnitudinum dupla, inter ſe ſunt æqualia, etiam tripla erunt æqualia; & qudrupla; & decupla; & millecupla, & ſic in infinitum. Si vero inæqualia fuerint: unum ergo majus erit, alterum minus. Sit AE major magnitudo; AD autem minor: erectaque ex D perpendiculari quacunque, ita ut angulus ad D ſit rectus; conjungantur AE & AD circa A: ita ut faciât, cum perpendiculari, triangulum AED. Multiplicetur nunc linea AD, ita ut duplum ejus ſit AG, triplum *AI*, quadruplum AL, & ſic in infinitum. Producatur AE verſus E infinitè v. cauſa in M. eductiſque ex G. I. L. B. perpendicularibus uſque dum ſecent AM. infinitè eductam: dico ſingula ſegmenta, dare duplum, triplum, qvadruplum, qvintuplum ipſius AE: hoc eſt, perpendicularem ex G ſecare AM. in F, ita ut AF ſit dupla ipſius AE: perpendicularem vero ex *I* ſecare AM in H, ita ut AH ſit tripla ipſius AE,

AE, ſicut AI eſt tripla ipſius AD, Atque eodem modo perpendicularem ex L. ſecare AM in K: ita ut AK ſit qvadrupla ipſius AE. rurſumque perpendicularem ex B ſecare AM in C, ita ut AC ſit qvintupla ipſius AE. Quoniam enim DE. GF. IH. LK. BC ſunt perpendiculares ejuſdem rectæ AB: ergo inter ſe omnes ſunt parallelæ: adeoque erit, ut AD ad AG, ſic AE ad AF: & ut AD ad AI, ſic AE ad AH: & ſic in ſequentibus. Vel, alia methodo, jungantur EG & DF. qvoniam ergo triangula hæc EFD, & EGD ſunt in eadem baſi ED, & inter eaſdem parallelas ED. FG: erunt triangula invicem æqualia. Eſt vero triangulum AED, etiam æquale triangulo EGD, utpote in eadem altitudine, & in æqvalibus baſibus. AG enim dupla eſt ipſius AD, adeoque DG æqualis ipſi AD. Quæ autem eidem æqualia, etiam invicem ſunt æqvalia. Eſt ergo triangulum EFD æquale triangulo AED. Sunt vero in eadem altitudine. erunt ergo & baſes æqvales per I. Sexti Elem: adeoque EF æqualis ipſi AE. Tota ergo AF erit dupla ipſius AE. Jungantur porro EI & DH. quoniam ergo triangula EID, & EHD ſunt inter eaſdem parallelas ED & HL, & ſuper eadem baſi ED, erunt invicem æqualia. Eſt vero triangulum EID duplum trianguli ADE. Sunt enim in eadem altitudine: adeoque, ſe habent invicem, ut baſes. DI autem, dupla eſt ipſius AD. tota enim AI, tripla eſt ipſius AD. Triangulum ergo DHE erit duplum trianguli ADE. Sunt vero hæc triangula in eadem altitudi-

tndi-

tudine. Ergo & baſis HE baſeos AE dupla erit: adeoque, tota HA, tripla erit ipſius AE. Eodem modo junctis EL. & DK. demonſtratur EK eſſe tripla ipſius AE, adeoque AK, qvadrupla eſſe ipſius AE. Et ſic AC ipſius AE qvintupla. Rectæ ergo AF & AG ſunt æquemultiplices AE & AD. Tum quoque AH & AI. & rurſum AK & AL. & denique AC & AB. æquemultiplices ipſarum AE & AD. Eſt autem, ut AD ad AG, ſic AE ad AF. & ut AD ad AI, ſic AE ad AH. vel, ut AD ad AE, ſic AG ad AF, & AI ad AH, & AL ad AK, & AB ad AC. Rectæ enim DE, GF, HI, KL, CB, ſunt parallelæ, utpote eidem rectæ perpendiculares. Ut ergo magnitudo ad magnitudinem, ſic æquemultiplices ad æqvemultiplices. Rurſum ut AF ad AE, ſic AG ad AD, & ut AH ad AE, ſic AI ad AD. Ut ergo, æqvemultiplex primæ, ad primam magnitudinem; ſic, æqvemultiplex ſecundæ, ad ſecundam. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

Si fuerint qvatuor magnitudines, qvarum prior ad ſecundam, eandem habet rationem, qvam tertia ad qvartam, antecedentia vero qvacunque multiplicatione modo ambo eadem multiplicentur: tum qvoque conſeqventia, qvacunque multiplicatione, ſed ambo eadem, multiplicentur: dico, ſi multiplum primæ, excedat multiplum ſecundæ; etiam multiplum tertiæ, excedere multiplum qvartæ: & ſi

Digitized by Google

& ſi deficiat; deficere: & ſi æqvetur, æqvari. Et vice verſa, *ſi antecedentibus æquemultiplicatis, & conſeqventibus etiam æquemultiplicatis, multiplicia antecedentium, ſimul excedant multiplicia conſequentium; ſimúlve ab iis deficiant, aut ſimul æqventur, in omni multiplicatione: tum primam, ad ſecundam, eandem habere rationem, qvam tertia, ad qvartam.*

Sint enim in figura num. XXI. magnitudines *AB*. *AC*. *AD*. & *AE*: & ſit, ut, *AB* ad *AC*: ſic *AD* ad *AE*. Æquemultiplicentur *AB* & *AD*, nempe qvintuplicentur, faciantq; *AF* & *AG*. *AC* autem & *AE*. conſeqventia etiam æqvemultiplicentur, faciantque duplicata *AH* & *AI*; triplicata autem, *AM* & *AL*: dico, ſi *AF*, multiplex primæ, ſeu *AB*, ſuperaverit *AH* multiplicem ſecundæ ſeu *AC*: etiam *AG* multiplicem tertiæ ſuperare *AI*, multiplicem qvartæ. Et ſi *AF* multiplex primæ, minor fuerit qvam *AM* multiplex ſecundæ: etiam *AG* multiplicem tertiæ, minorem eſſe *AL* quæ eſt multiplex *AE*, ſeu qvartæ: & ſi æqvetur, æqvari. Quoniam enim demonſtratum fuit præcedente propoſitione, æqvemultiplices duarum magnitudinum eandem invicem habere rationem, qvàm magnitudo prima ad ſecundam: erit ergo, ut, *AB* ad *AD*, ſic *AF* ad *AG*. Sunt enim *AF* & *AG* æqvemultiplicia magnitudinum *AB* & *AD*. Et rurſum, ut, *AC* ad *AE*, ſic *AH* ad *AI*. Sunt enim *AH* & *AI* æquemultiplicia magnitudinum *AC* & *AE*. At vero ex conſtructione, eſt, ut, *AB* ad *AC*, ſic *AD*

Digitized by Google

ad *AE*: vel, ut, *AB* ad *AD*, ſic *AC* ad *AE*. Erit ergo, ut *AB* ad *AD*, hoc eſt, ut *AF* ad *AG*; ſic *AC* ad *AE*, hoc eſt, ſic *AH* ad *AI*, vel *AM* ad *AL*. Si ergo *AF* multiplex primæ, ſeu *AB*, ſuperaverit *AH* multiplicem ſecundæ; etiam *AG* multiplex tertiæ ſuperabit *AI* multiplicem qvartæ. Eſt enim, ut, *AF* ad *AH*, ſic *AG* ad *AI*. Et, ſi *AF* multiplex primæ, minor fuerit qvam *AM* multiplex ſecundæ: etiam *AG* multiplex tertiæ, minor erit qvam *AL* multiplex qvartæ. Eſt enim, ut *AF* ad *AM*, ſic *AG* ad *AL*. Deniqve, ſi multiplex *AC* æqvalis fuerit multiplici *AB*, etiam multiplex *AE*, æqvalis erit multiplici *AD*.

Pro altera autem parte propoſitionis demonſtranda, ſit *FA* & *GA* æqvemultiplicia antecedentium *AB* & *AD*, qvæ qvidem juxta qvamcunqve multiplicationem, ſimul excedant æqvemultiplicia, conſeqventium *AC* & *AE*; ſimulq; deficiant, aut ſimul æqventur: dico *AB* ad *AC* eandem habere rationem, qvam *AD* ad AE. Quod in omni hac multiplicatione verum eſt. Si enim adverſarius hoc negaverit, dixeritq;, antecedentia qvidem æqvemultiplicata juxta qvamcunqve multiplicationem, ſimul exedere æqvemultiplicia conſeqventium &c. non tamen ideo rationes eſſe eaſdem ſeu æqvales: ſit ergo una qvidem ratio AB ad AC, altera autem AP ad AE, qvarum antecedentia ex adverſarii hypoteſi æqvemultiplicata juxta qvamcunqve multiplicatio-

nem

Digitized by Google

nem ſimul excedant æqvemultiplicia conſeqventium: nec tamen ipſæ rationes ſint æqvales. Quintupletur AP, ſitqve AQ. Retentis ergo prioribus, qvintuplum qvidem AB, unius antecedentis, eſt AF: qvintuplum verò alterius antecedentis, nempè AP; eſt AQ. Ex prioribus autem, duplum ipſius AC, prioris nempe conſeqventis eſt, AH; duplum verò AE poſterioris conſeqventis, eſt AI. Excedit autem AF æqvemultiplex unius antecedentis ipſam AH æqvemultiplicem ſui conſeqventis. AQ autem æqvemultiplex alterius antecedentis, non excedit AI æqvemultiplicem alterius conſeqventis: ergo non ſimul excedunt æqvemultiplicia antecedentium æqvemultiplicia conſeqventium: qvod eſt contra hypotheſin. Supponitur enim æqvemultiplicia ſimul excedere. Quaſcunqve ergo rationes inæqvales ſumat adverſarius, ſtatim demonſtratur æqvemultiplicia antecedentium, non ſimul excedere æqvemultiplicia conſeqventium juxta qvamcunqve multiplicationem: adeoqve aliqvid concludi, qvod eſt contra hypotheſin. Liqvet ergo, propoſitum verum eſſe.

Propositio III.

Si qvatuor magnitudinum, prima & tertia qvacunq; multiplicatione æqnemultiplicentur, ac ſecunda & quarta etiam qvacunque multiplicatione æquemultiplicentur: æquemultiplex autem primi, excedat æquemultiplicem ſecundi, ſed æquemultiplex tertii non excedat æquemultiplicem

 quar-

quarti: erunt duæ illæ rationes inæqvales; & illa qvidem major, cujus antecedentis æqvemultiplex, conſequentis æqvemultiplicem excedit: illa autem minor, cujus antecedentis æqvemultiplex, conſequentis æqvemultiplicem non excedit: hoc eſt, prima magnitudo ad ſecundam majorem habebit rationem, qvam tertia ad qvartam. Sint in figura XXI. qvatuor magnitudines AB, AC, AP, AE. qvarum prima & tertia qvintuplicatæ dent AF & AQ. ſecunda verò & qvarta duplicatæ dent AH, AI: dico, qvoniam AF, multiplex primæ ſuperat AH multiplicem ſecundæ, AQ autem multiplex tertiæ, non ſuperat AI multiplicem quartæ; qvod ratio AB ad AC major ſit qvam AP ad AE. Quod enim ratio AB ad AC diverſa ſit ab ratione AP ad AE, adeoque, binæ hæ rationes inæqvales: præcedenti propoſitione demonſtratum eſt. Cum ergo rationes AB ad AC, & AP ad AE ſint ineqvales: ergo una neceſſariò minor erit; altera major. At illam rationem majorem eſſe, cujus antecedentis multiplum, majus eſt multiplo conſeqventis, illam autem minorem, cujus antecedentis multiplum; minus eſt multiplo conſeqventis ipſa recta ratio & ſana hominis mens dictitat. Quis enim ſanus contrarium ſtatuerit? aut qva veritate, vel in mediū illud adduci, vel ſapientibus viris probari poteſt? Imò verò, reipſa rationem AB ad AC, majorem eſſe, quam AP ad AE, inde liquet. Reductis enim ambabus rationibus ad idem conſequens AE: erit qvidem, ut AB ad AC, ſic AD ad AE. Ratio

ergo

ergo AD ad AE, æqvalis rationi AB ad AC, eſt major ratione AP ad AE. Eſt enim antecedens AD majus antecedente AP. ideoque illa ratio major hac, per ea, qvæ ſunt demonſtrata capite: XIV. pag 311.

Quibus demonſtratis, ipſa definitio VII. libri V. Elementorum Euclidis veriſſima deprehenditur: falſumque omne illud quod Meibomius in contrarium movet: tum qvoque, ea omnia vera, qvæ Propoſitione VIII. & X. libri V. Elementorum ſunt propoſita, cum ex hac definitione, demonſtratio eorum juxta Euclidem procedat. Imò verò, ſi hæc definitio omitteretur: harum tamen Propoſitionum veritas facillima methodo demonſtraretur. Eſt enim VIII. Propoſitio, hæc. *Inæqvalium magnitudinum major ad eandem, majorem habet rationem, qvam minor: & eadem ad minorem, majorem habebit rationem, qvam ad minorem.* Nempè, tribus qvibuſcunque magnitudinibus datis, eadem, vel utraque datarum major eſt, vel minor, vel alterutri æqualis, vel denique una qvidem major, altera minor. Ut in figura XXII. Sint duæ datæ AB major, & CB minor, qvæ qvidem conferantur cum alia, nempe, vel AK, ita ut AK utraque data major ſit, vel AF, qvæ utraque data, minor ſit, vel AI aut AG, qvarum illa ipſi AB, hæc, ipſi CD eſt æqvalis, vel denique AH, quæ neutri datarum ęqvalis eſt, ſed minor qvidem qvàm AB, major autem qvàm CD. In omnibus ergo caſibus, ratio majoris ad eandem major eſt; qvam minoris ad eandem: cum retento eodem

Digitized by Google

conſeqvente, antecedens illius rationis ſit majus. Datæ enim rationes, qvæ invicem comparantur, ſunt, AB ad EK, & CD ad EK: AB ad EI, & CD ad EI: AB ad EH, & CD ad EH: AB ad EG, & CD ad EG; denique AB ad EF, & CD ad EF. At in omnibus hisce rationibus ſemper priorum rationum antecedentia ſunt majora antecedentibus poſteriorum: cum illic antecedens ſit major magnitudo, heic minor; conſeqvens autem idem. Rationes ergo majoris magnitudinis ad eandem majores ſunt, qvam rationes minoris magnitudinis ad eandem: qvoniam illic antecedens majus eſt; hic minus: juxta demonſtrata capitis XIV. pag. 311.

At verò ex iiſdem principiis conſtat, rationem ejuſdem ad minorem magnitudinem majorem eſſe ratione ejuſdem ad majorem magnitudinem: hoc eſt, in fig. XXII. rationem EK ad CD majorem eſſe, qvam EK ad AB, & ſic EI ad CD majorem rationem habere, qvam EI ad AB: eodemque modo EH, vel EG, vel EF majorem habere rationem ad CD qvam ad AB. Si enim eodem antecedente retento, conſeqvens augeatur: ipſa ratio imminuitur: juxta ea qvæ demonſtrata ſunt capite XIV. pag. 310. Unde cum in omnibus hiſce rationibus idem ſit antecedens, unum autem conſeqvens majus, alterum minus: erit etiam illa ratio major, cujus conſequens minus; illa vero minor, cujus conſeqvens majus: adeoqve, ratio ejuſdem ad minorem magnitudinem, major, qvam ejuſdem ad majo-

majorem magnitudinem. Unde tota Propoſitio VIII. certiſſime ac breviſſime demonſtratur.

Sed & decima propoſitio hujus libri ex hoc eodem principio demonſtratur. Verba Euclidis ſunt. Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι, πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν. *Qvæ ad idem rationem habent; eorum majus qvidem illud eſt qvod majorem habet rationem : ad qvod autem idem majorem habet rationem, illud minus eſt.* Nempe, cum duæ magnitudines antecedentes idem habeant conſeqvens; unum autem antecedens, majorem ad idem habeat rationem, qvam alterum: ſeqvitur, hoc antecedens majus eſſe. Etenim demonſtratum antea eſt; majorem illa rationem habere, qvorum antecedentia cum eodem conſeqvente comparata ſunt majora: minorem vero, qvorum antecedentia minora. Vide capite XII. & XIV. Hæc ergo tam certa ſunt, ac ſolem meridie lucere, aut nos homines eſſe. Unde falſum ac vanum omne illud qvod à Meibomio in contrarium adfertur. Videndum tamen, qvibus argumentis hæc oppugnet Meibomius, & an illa ſapiente viro, aut veritatis amante digna?

CAP. XVI.

Ipſum ergo Meibomium nunc diſſerentem audiamus libro ſuo de Proportionibus pag. 126. *Falſa igitur eſt octava Propoſitio libri qvinti Elementorum Euclidis & de-*

Digitized by Google

& decima, qvas pag. 32. & 36. retuli; & multæ aliæ, quæ ab his pendent. Falſa ergo eſt, uti poſtea amplius oſtendam libri qvinti definitio ſeptima, qvam pagina 30. & 4. retuli, quâ tanqvam baſi octava illa Propoſitio nititur. Multæ autem Propoſitiones veterum qvamvis falſæ non ſint, malè tamen ex his elementaribus demonſtratæ probantur. Male enim Euclides hac octava quinti uſus demonſtrauit ejuſdem libri Propoſitiones XIV. XX. XXI. Male quoque divinus Archimedes ex eadem demonſtravit ſecundam propoſitionem libri primi de Sphæra & Cylindro, qvam pagina 37. adduxi, ad qvem Eutocius commentando multas erroneas Propoſitiones, ex octava quinti deductas, protulit; qvas ante ipſum Pappus produxerat Mathematicorum Collectaneorum lib. VII. ex quo deſumptas, libri qvinti Elementorum fini, Juniores illa adtexuerunt. Ex illa quoque octava qvinti, propullulavit inſignis illa paralogiſmorum ſeries, in ſecunda demonſtratione VIII. Propoſitionis libr. II. de Sphæra & Cylindro qvæ à paginæ 48. verſu 23. his verbis incipit, δεικτέον ἐν ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ. *Monſtrandum igitur quadratum à CH in HF minus eſſe rectangulo à BHC in HG. qvod idem eſt ac monſtrare quadratum à CH ad rectangulum, à BHC minorem rationem habere, qvam rectam GH ad HF. Nempe 16. ad 24. minorem habere rationem qvam habeat* $10\frac{1}{2}$ *ad* $15\frac{1}{2}$, *vel 21 ad 31. cum contra ſtatuendum ſit 16. ad 24. majorem habere rationem, qvam habeat 21. ad 31. Qvoniam enim eſt, ut 16. ad 24, ita 21. ad* $31\frac{1}{2}$, *maior eſt diſtantia inter*

21. &

21. & 31½, *hoc eſt* 16. & 24, *qvàm inter* 21. & 31. *Nulla autem ex omni antiqvitate Mathematica illuſtrior Propoſitio proferri poteſt, qvam hæc ſit octava Archimedis; in qva toties dicatur, qvæ ratio major ſit, quæ minor; qvæ alterius dupla, qvæ ſeſqvialtera, in quo cum Theone juniores omnes & in primis Gregorius à Sanct. Vincentio tam amplè errarunt. Ideoque Eutocii commentarium, qvo fuſiſſimè hæc Propoſitio & Euclidea doctrina, id eſt, libri qvinti Propoſitiones VIII. & X. enarrantur, totum proferendum putavi: ut, qvid veteres, hic docuerint, clarè omnibus conſtaret. Ita autem hæc cohærent, ut omnes Juniorum errores, niſi perſpectis veterum erroribus ſoli de dijudicari neqveant. Qvare, inqviebat Euthymius, cum is præcipuus hujus narrationis mihi ſcopus ſit, ut, totam antiqvitatem; ignoratæ in qvibuſdam Elementis Geometriæ convincam; deinde autem, Juniorum pravas explicationes & monſtroſas hallucinationes demonſtrem; antiqvis hunc honorem habebo, ut primi, demonſtrationum viribus adacti, veritati, omnium rerum antiquiſſimæ, victoriam concedere cogantur.* Agite ergo, *ò præclari Mathematici, & omnes ingenii neruos contendite, ut & acutè omniá quæ porro relaturus ſum inſpiciatis, & alacriter veſtra rationibus adductis defendatis. Falſam dixi qvinti libri Propoſitionem octauam. Quod ſi illa quæ in principiis, paulo ante expoſui, bene vobis perpenſa eſſent, falſitatis quoque cauſas perſpectas haberetis. Duobus autem modis illius falſitatem oſtendam. Primo falſa Euclidis principia de-*

monſtrando : Altero , vera Euthymii principia confirmando. Ita autem & contra Euclidem porro argumentatur & ſua probare conatur. *Tres autem hujus Propoſitionis caſus eſſe poſſunt. Vel enim tertia D*: (nempe adhibeatur diagramma Euclideum ad hanc Propoſitionem à Commandino allatum) *utrauis reliquarum* $\frac{A}{B}$, *C minor eſt; vel major: vel majore* $\frac{A}{B}$, *minor; minore autem C, major. Primo caſu, primum hujus Propoſitionis membrum, qvod pagina* 32. *relatum eſt his verbis*; Inæqvalium magnitudinum major ad eandem majorem rationem habet, qvam minor *Euthymius verum pronunciat: falſum autem membrum ſecundum, reuertendo aduerſam priori ſententiam proferens: quod ibidem his verbis conceptum attulimus*; & eadem ad minorem, majorem rationem habet, quam ad majorem. *Atque hujus primi caſus illud exemplum ponemus, quod Græci codices editus & manuſcripti adferunt: quod & Commandinus retinuit, Græci Codicis religioſus interpres; quem ſine cauſa hic deſeruit Clauius, dum tertiam D, ſecunda C poſuit majorem, propoſitionum XIV. XX. XXI. ejuſdem libri demonſtrationes, ut puto, ſecutus. Verum igitur eſt primum membrum,* $\frac{A}{B}$ *ad D, ſeu* 7 *ad* 4. *majorem rationem habere, quam C ad D, ſeu* 5 *ad* 4: *at falſum membrum ſecundum, nempe D ad C, ſeu* 4 *ad* 5, *majorem rationem habere, quam D ad* $\frac{A}{B}$, *ſeu* 4 *ad* 7. *Secundo caſu, primum membrum falſum eſt; verum autem ſecundum. Falſum enim eſt* 4 *ad* 6, *majorem ratio-*

rationem habere , qvam 3 ad 6. ſed verum 6 ad 3, majorem habere rationem , qvam 6 ad 4. Tertiò caſu falſum eſt utrumque membrum , quippe & hoc falſum eſt 4 ad 3 , majorem habere rationem, quam 2 ad 3 ; & iſtud 3 ad 2, majorem habere rationem, quam 3 ad 4. quod diuerſi generis rationes inter ſe comparari nequeant. Quarè ex tribus hujus Propoſitionis caſibus, unus verus eſt, reliqui duo falſi, ut ſtatim demonſtrabimus. Hæc ipſius Marci Meibomii verba ſunt, in quibus præter ſtolidam quandam vanitatem atque arrogantiam , inſignis quoque ſe monſtrat falſum dicendi libido. Eqvidem capite *XI.* hujus libri accuratè & plenè demonſtravimus, qvàm turpiter Meibomius Lectori imponat, dum Theoni aliiſque juniorum errorem affingit, qvem non commiſère : quam falſò hunc ipſum Theonem & Eutocium accuſet, cum & is, & cœteri poſt ipſum Mathematici, optime ea omnia ſciverint, qvæ Meibomius pro ſuis oraculis venditat pagina 68. Unde hæc tam cruda rurſum Lectori apponere opus non erat. Eqvidem, in iis quæ antea attigimus , ita ſe geſſit Meibomius, ut fraus non ab omnibus tam facile animadverteretur. Quotuſquiſque enim eſt, qui Theonem veteréſve legit. In his autem , quæ contra Euclidem movet, ipſa veritatis principia ſingulis, omnibuſque hominibus innata, convellit ; ut multo qvidē helleboro ipſi opus ſit, ad tam craſſos humores cerebro pellendos , qvibus occupata mens, id vel ignorat, vel reſpuit, quod nemo ſanus verum eſſe non

Digitized by Google

pervidet: nemo, niſi mente motus, pro falſo unquam habuerit. Falſam dicit octavam & decimam Propoſitionem V. Elementorum Euclidis: falſam VII. definitionem ejuſdem libri: quas omnes veras eſſe, & nunc dicimus, & antea clariſſimè demonſtravimus. Unde nugæ ſunt, quæ de erroribus & falſis explicationibus Veterum pariter ac recentiorum hac in parte ſomniat Meibomius. Quæ enim hiſce fundamentis nituntur, atque hinc ſolide demonſtrantur, certiſſima ſunt; cum ipſa fundamenta ſint optima ac certiſſima. Illi verò, qvi exiſtimant nos Meibomio nihil contrarium dicere, advertant huc animum. Is enim falſam octavam & decimam Propoſitiones libri qvinti Elementorum dicit: ego utramque veram eſſe demonſtro. Is rationem 16 ad 24, majorem eſſe ait ratione 21 ad 31: ego minorem dico. Is falſum eſſe ait, *rationem 4 ad 6, minorem eſſe quam 3 ad 6.* ego idipſum verum eſſe affirmo. Quid magis contrarium, qvam verum & falſum? affirmatio & negatio? majus & minus?

Sed conferamus invicem Euclidis, hoc eſt, noſtram aſſertionem, cum hac Meibomii: & primò quidem, in tertio Meibomii caſu, ubi AB, ſeu unam datarum magnitudinum, tertia ſeu D majorem ponit, C autem ſeu ſecundam, eadem tertià minorem. Sitque in figura num. *XXII.* hujus libri, AB Meibomii, ſeu prima inæqualium, etiam noſtra AB. C. autem Meibomii ſeu ſecunda inæqualium, ſit noſtra CD, deniq; tertia

Digitized by Google

tertia ſeu eadem qvæ eſt Meibomii & Euclidis D, ſit noſtra EH. Dicit autem Euclides rationem AB ad EH, majorem eſſe, qvam CD ad EH. Tum qvoq;, EH ad CD, majorem habere rationem, qvam ad AB. Utrumque falſum eſſe ait Meibomius: nos autem veriſſimum eſſe antea certiſſime demonſtravimus. Per ea enim, qvæ capite XIV. & XII. fuere propoſita, manifeſtum fecimus: reductis binis rationibus, ad idem conſequens, tùm illam majorem eſſe, cujus antecedens majus; illam vero minorem, cujus antecedens minus. Retento autem eodem antecedente, illam rationem majorem, cujus conſequens minus; illam vero minorem, cujus conſequens majus. Ratio ergo AB ad EH, major erit, quam CD ad EH: cum antecedens AB, majus ſit, antecedente CD. & rurſus, ratio EH ad CD, major erit, quàm ad AB; cum illud conſequens minus ſit; hoc majus. Videndum verò, quid contra manifeſtam hanc veritatem adferat Meibomius? Dicit *utrumque membrum hoc caſu falſum eſſe, quod diverſi generis rationes exceſſiva & defectiva inter ſe comparari nequeant.* At vero unde probat Meibomius haſce rationes comparari invicem non poſſe? Credítne nos adeo fungos eſſe, ut fidem habeamus contra claras ac manifeſtas demonſtrationes ſine probatione qvicqvam proponenti? At ſi in Geometricis diſputare velit, ſaltem principia ipſius cognita habeat. Demonſtravimus autem in prioribus, nihil in Geometria ſupponi debere: niſi quod

Digitized by Google

communi omnium hominum notione verum deprehenditur. Sicut illa Geometrarum Axiomata verè talia ſunt. *Quæ eidem æqualia etiam inter ſe ſunt æqualia. Et totum majus ſua parte.* At vero taléne hoc eſt principium Meibomii. *Rationes exceſſivæ & defectivæ comparari invicem nequeunt.* Quis unquam mortalium hoc conceſſerit, præter Meibomium? Contrarium docent omnes Geometræ, omnes Mathematici. Imo reipſâ comparant invicem rationes exceſſus & defectus. At ſi impoſſibile eſſet rationes exceſſûs & defectûs invicem comparare: neque id feciſſent Geometræ. Quod enim impoſſibile eſt, aut fieri nequit, id nemo mortaliũ facere poteſt. Sane, id quivis ratione præditus perſpicit: quod ea quæ fieri nequeũt; ab nemine fiăt. At revera comparătur invic ĕrationes exceſſûs & defectûs. Ergo comparatio taliũ rationum fieri poteſt, neque eſt impoſſibilis. Sed video facilè, quid Meibomium in hunc errorem præcipitaverit. Fando forte audiverat, eſſe qvædam apud Geometras, quæ comparari invicem nequeunt. Crediderim quoque ex verbis hiſce Euclidis in Definitionibus rationum, λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν κλ. *Ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis* &c. erroris ſui fundamentum traxiſſe. Verum qvidem eſt, nullam rationem poſſe ſumi inter aliquid & nihil. Τοῦ γὰρ ὄντος πρὸς τὸ οὐδὲν οὐδεὶς λόγος ἐστί. Ratio enim rei alicujus ſeu (entis) ad nihil nulla eſt. Unde hac quidem in

parte

parte verum ait Meibomius pag. 146. (quamvis nihil novi adferat) diuitum bona, cum pauperum bonis, quæ nulla ſunt, conferri non poſſe. Sed unde probat Meibomius, rationes exceſſivas (ut ille loqvitur) aliqvid eſſe, defectiuas vero nihil? Sanè, rationem æqualitatis vocat rationem nihili. An vero rationes defectûs etiam ſint rationes nihili? id autem ignoro. Quod ſi has quoque tales fecerit, jam non video qvid inter rationes æqualitatis & defectûs diſcriminis ſiet. Equidem inter jocoſeria narratum mihi aliquando fuit, vaccam ſine cerebro vixiſſe per ſpatium aliquod ſatis longum, craniúmque apertum nibil cerebri monſtraſſe, ſed vias quidem ductuſque omnes, tum quoq; pulpam ipſam in lapidem mutatam. Quod ego Meibomio eveniſſe nollem. Tum enim facile fieri poſſet, ut cui nihil in capite cerebri eſſet; illi quoque ipſa ratio adeo defectiva foret, ut planè inſtar nihili fieret. Sed meliora ſperamus optamuſque. Tantum id ajo, male argumentari Meibomium, pag. 146. qui principium ſuum, nempe *rationes exceſſûs & defectûs non poſſe invicem comparari* hinc probat; quod bona diuitis & egentis, ſeu qui nil poſſidet, nequeant conferri. Verum enim eſt, ſi quidem Titius nihil plane poſſideat; tum bona Lucii, cum illius bonis, comparari non poſſe: cum nulla inſtitui poſſit collatio, inter aliquid & nihil. Hoc autem contra comparationem rationum exceſsûs & defectûs nil concludit: cum, rationes defectus verè ſint aliquid: ideoque, collatio iſta ſit rei ali-

alicujus ad aliam. Ut autem curioſo Lectori, gratam, hac in parte, operam præſtemus: paulo accuratius de iis diſputabimus, quæ comparari in Geometricis invicem nequeunt. Inter ea ergo, ratio in Geometricis ſumi non poteſt: quæ, communem aliquam menſuram non habent. Cum enim ratio proprie atq; accurate loquendo, ſit mutua duarum magnitudinum relatio ſecundum quantitatem: hoc eſt, ratio ſit illa habitudo, qvam una magnitudo habet ad aliam; nempe, quod vel æqualis alteri ſit, vel dupla, vel tripla, vel centupla, & ſic porrò in infinitum: hæc autem relatio ſeu habitudo, non cognoſcatur ſine communi menſura: ergo, ubi nulla communis menſura, ibi neque ratio. Ubi enim nulla fuerit communis menſura: ibi neque dici poteſt, an unum alterius duplum ſit, an triplum, an dimidium; unde nec ipſa ratio haberi ſciríve poteſt. Equidem, in magnitudinibus ineffabilibus dicere nequeo, unam alterius duplam triplámve eſſe: certam tamen harum linearum menſuram habeo, ita ut in qvibuſcunque datis lineis eandem menſuram exprimere poſſim. Inter lineam vero & quadratum quodcunque, in Geometricis nulla ratio datur: quia nulla horum perfecta communis menſura. Longitudo quidem totam lineam menſurat, ſed quadratum cubúmve non niſi ſecundum unam menſuram. Cœteræ autem menſuræ in latum nempe & profundum, in linea non ſunt. Ideoque, cum menſurari eo modo linea nequeat; utique nec dici poteſt, quota

pars

Digitized by Google

pars, aut quotupla qvadrati cubíve ſit. Hanc ob cauſam, neque ratio inter finitum & infinitum datur: (Infinitū enim illud vocatur, cujus nulla eſt menſura) ſicut neq; inter magnitudines, pondera aut numeros. Neque enim magnitudinis alicujus & numeri, communis menſura datur. In magnitudine enim quacunque, qvicunque numerus ſumitur: cum omnis magnitudo in infinitum dividatur: adeoque, & unum, & mille, & centum mille numeri illic concipiantur. Eodem modo in eodem pondere diverſi numeri diverſæque magnitudines conſiderantur. Si enim cubus ferreus cum cubo plumbeo comparetur: ſi magnitudo eadem fuerit, pondus diverſum erit: & ſi pondus utrinque idem, magnitudo erit diverſa. Cum ergo nullam communem menſuram habeant magnitudines, pondera & numeri; neque comparari invicem poſſunt ſecundum magnitudinem: adeoque nec inter illas ratio dari. Euclides, aliis qvidem verbis explicuit naturam eorum qvæ comparari invicem poſſunt. Definitione IV. libri qvinti. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. *Rationem invicem magnitudines habere dicuntur, quæ multiplicatæ ſe invicem poſſunt excedere.* Unde, rationem invicem non habebunt, qvæ multiplicatæ, ſe invicem excedere nequeunt. Atque ita qvidem, infinitum ad finitum, nullam habebit rationem: qvandoqvidem, quodcunque finitum, qvomodocunq;

docunque multiplicetur, ſemper finitam habeat magnitudinem, ideoque infinitum excedere nequeat. Neſcio tamen, an hæc definitio ſatis ſit accurata? Inter lineam enim & cubum ratio non datur. Et tamen haud pro certo dixerim, ſaltem, non tam clarum & manifeſtum id eſſe arbitror, ut ſupponi debeat: lineam, qvocunque modo multiplicetur, qvadratum tamen, cubúmve excedere non poſſe. Certum qvidem eſt exceſſum lineæ ultra qvadratum aut cubum non dari. Verùm id ideo contingit, qvod nulla ſit menſura, qva exceſſus iſte menſuretur. Omnia ergo, quæ communem menſuram nullam habent, ſunt planè irrationalia, hoc eſt, nullam ad invicem rationem habent. Scio aliter vocem *irrationalis* Geometris qvibuſdam uſurpari, nempe, pro eo, qvod nos ineffabilem rationem dicimus: ſed hæc propria atque accurata vocis ſignificatio eſt. Quæ ergo communi menſura carent, ea neque comparantur invicem ſecundum qvantitatem. Cœtera autem poſſunt. Sic linea curva & recta comparantur invicem. Linea enim parabolica, hoc eſt, curva, æqvatur alteri rectæ. Sic linea cum lineis, pondera cum ponderibus, numeri cum numeris comparantur. Id autem, qvod de menſura hucuſque diximus, accuratiùs adhuc nobis erit explicandum. Omne ergo, qvod ſecundum qvantitatem cum alio comparatur, talem omnino ad aliud σχέσιν habet; ut vel alteri ſit æqvale, vel majus, vel minus. Omnis enim σχέσις, ſecundum qvantitatem,

tem, in hiſce tribus conſiſtit; nempe, ut antecedens terminus conſequenti, vel æqvalis ſit, vel major, vel minor. Atqvi hoc ſciri neqvit, niſi per communem menſuram, qvæ qvidam indicat, an ambo termini, æqvales ſint, an unus major, alter minor. Quæ ergo hac communi menſura carent, in illis neque ſciri poteſt, an æqvalia invicem ſint? an majora, minoráve? adeoque, nec ſciri, qvam χέσιν invicem habeant: unde nec ratio inter talia datur. Si autem communem menſuram habuerint, facilè cognoſcitur qvis datorum terminorum major ſit, qvis minor? niſi ambo fuerint æquales. At ſi cognitum eſt terminos, vel æquales eſſe, vel majorem unum, alterum minorem, idque certo modo, ut unus alterius, vel duplus ſit, vel triplus, vel ſubduplus, vel denique, ut linea ad lineam; qvæ omnia menſura cognoſcuntur: jam qvoque ratio ipſa datur. cum ratio nihil aliud ſit, qvam hæc ipſa χέσις qvam unum qvantum habet ad aliud juxta datam qvantitatem. At vero omnes rationes communem habent menſuram, nempe antecedentium terminorum. Id enim qvod qvantitatem exprimit ac definit, menſurat rem. Sed antecedens exprimit & definit qvantitatem rationum. Si enim antecedens duplum fuerit conſeqventis, ratio eſt dupla; ſi, antecedens triplum, ratio tripla: ſi antecedens ſubduplum, ratio ſubdupla: atque ſic in infiinitum Cum ergo in omnibus rationibus, tam exceſsûs qvam defectûs antecedens exprimat ac definiat qvantitatem rationum,

Digitized by Google

ergo communis rationum menſura datur, adeoque invicem poſſunt comparari.

CAP. XVII.

Sed aliud fortè argumentum opponet Meibomius: nempe, cum ipſe Euclides fateatur, eas ſolas magnitudines mutuam rationem habere, atque invicem comparari poſſe, qvæ, multiplicatæ ſe invicem excedunt, ergo & illæ ſolum rationes comparari invicem debent, qvæ multiplicatæ ſe invicem poſſunt excedere. At vero rationes defectûs, ſi in infinitum in ſe multiplicentur, nunqvam tamen excedent rationem qvamcunque exceſsûs datam. Si enim rationem quamcunque defectûs duplicaverim, triplicaverim, deniq; millies, aut centies millies in ſe multiplicaverim: ſemper ratio facta, erit ratio defectûs, adeoque, minor qvacunque data ratione exceſsûs. Cum enim demonſtratum antea ſit, capite XII. & XIIII. rationes exceſsûs multiplicari, qvando media proportionalis multiplicationi reſpondens, inter extrema ſeu terminos inveſtigatur: ratioque antecedentis ad mediam, eſt facta ex multiplicatione: quæ quidem priore major eſt, & tamen ſemper ratio defectûs: ideo ratio defectûs non poteſt excedere rationem datam exceſsûs.

Verùm ſi hoc omnino ita ſe haberet, certumque adeo foret, non poſſe rationes defectûs excedere rationes exceſsûs, neque ullo modo invicem comparari: non ideo qvicquam, vel contra Euclidem, vel

contra

Digitized by Google

contra Veteres Geometras proficeret Meibomius. Etenim, vel verum eſt id quod proponitur: rationes defectûs cum rationibus exceſsûs comparari non poſſe; quod illæ multiplicatæ, has excedere nequeāt: vel falſū eſt. Si falſum eſt; omnis controverſia eſt finita, ſoluſq; Meibomius erroris convincitur. Si verum eſt: utiq; id non ignorauit Euclides, qui ea tantum comparari invicem poſſe tradidit, quæ ſe invicem multiplicata excedunt. Sanè, nec in VII. definitione, neque in VIII. vel X. Propoſitione V. libri quicquam tradidit, ex quo demonſtretur Euclidem, rationes exceſsûs & defectûs invicem comparâſſe. Poſito enim, ex mente Meibomii, rationes exceſsûs & defectûs invicem comparari non poſſe, qvoniam iſtæ multiplicatæ has non excedant; cum ultimum hoc, ſit principium Euclideum: dicendum omninò, ſi prius verum eſt, neque illud ignoratum fuiſſe Euclidi: cum nihil diſertis verbis contra hoc dogma ſcripſerit. Ubi enim Definitione VII. rationes inæqvales, nempe majores & minores definit, ita loqvitur, ut verba qvidem ipſius facile explicari poſſint, de rationibus ejuſdem ſpeciei: ſi qvidem ſupponatur, rationes exceſsûs cum rationibus defectûs non comparari. In demonſtratione qvoq; Propoſitionis VIII. verba illa ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Δ. *alia vero magnitudo quæcunque* Δ. ità explicari poſſunt; ut eadem magnitudo; nempe Δ, vel major ſit, utraque data, vel minor. Si enim Euclides exiſtimaſſet rationes exceſsûs cum rationibus defectus omnino non

comparari; neque neceſſarium fuiſſet de eo heic monere, quod eadem ſeu D. media inter utramque datam ſumi non poſſet; quandoqvidem, id ex alio principio cognitum eſſet; eo nempè, rationes exceſſus & defectus non poſſe invicem comparari; qvod ſe invicem excedere neqveant. Atque ita qvidem conſtat, ſi verum omninò foret id qvod Meibomius ſupponit: nempè, non poſſe rationes exceſsûs & defectûs invicem comparari, non tamen ideo ullum Euclidis principium à Meibomio everſum eſſe: cum is nuſquam rationes exceſsûs & defectûs invicem diſertis verbis compararet.

Sed nec argumentum hoc Meibomii ullo modo verum eſt. Definitio enim Euclidea quæ de iis agit, quæ rationem invicem habent, tantum de magnitudinibus loqvitur: & ſi ipſis quoque rationibus neceſſario applicari deberet, nihil tamen contra hoc certum principium concluderet: qvandoquidem, rationes ſi invicem addantur, tandem, qvamcunque aliam rationem excedant: & ratio qvæcunque defectûs poſſit per aliam quandam rationem, nempe exceſsûs, ita multiplicari; ut datam rationem exceſsûs omninò excedat. Atque in additione res clara eſt. Detur enim qvæcunque ratio defectûs, nempè 1 ad 2, alia autem exceſsûs 3 ad 2. Si prior ratio qvater addatur invicem, erit ratio facta 4 ad 2, adeoque major, quam 3 ad 2. Cujus rei demonſtratio ex capite X. pag. 231. & ſeq. petatur. Verùm, in multiplicatione, etiam idipſum

Digitized by Google

idipſum liquet. Datis enim binis hiſce rationibus, 1 ad 2, & 3 ad 2. ſi priorem multiplicaverim per rationem 7 ad 2: prodit ratio facta 7 ad 4, qvæ major eſt ratione 3 ad 2, ſeu 6 ad 4.

Id verò, qvod principio dixi, non poſſe rationes defectûs in ſe multiplicatas ullam rationem exceſsûs ſuperare: nihil impedit, quo minus rationes ideò invicem comparari queant. Etenim antea demonſtravimus, ea tantum invicem comparari ſecundum magnitudinem non poſſe, quæ communi menſura carent. Rationum autem menſura ex antecedentiũ terminorum qvantitate dependet: qvæ facillime cognoſcitur, ubi ambæ rationes ad idem conſeqvens fuerint reductæ. Tum enim facile perſpicitur, quotuplus, aut qvota pars conſeqventis antecedens terminus ſit, adeoque communis menſura rationum datur. Sint enim in figura XIX. rationes ομ ad ζν, & αγ ad φε invicem comparandæ: reducantur ambæ ad idem conſequens φε, ſitque, ut ομ ad ζν, ſic ζν ad φε. Cum ergo ratio ζν ad φε, hoc eſt, σμ ad ζν, comparatur cum ratione αγ ad φε: facile perſpicitur, antecedens αγ partem eſſe conſeqventis φε: antecedens vero ζν, totum aliquod eſſe, cujus pars ſit φε: adeoque, illic eſſe rationem partis ad totum: heic autem, totius ad partem. Undè, communis menſura harum rationum datur. Ipſæ enim rationes, nullam, propriè loqvendo, qvantitatem habent. Sunt enim χέσεις ſeu relationes qvantitatum, qvoad qvantitatem, Quantitas autem ipſarum

ſarum ex qvantitate antecedentium terminorum ſimpliciter dependet. Si enim antecedens terminus, conſequentis duplus fuerit: ratio eſt dupla; ſi ttiplus, tripla: & ſic in infinitum. Nihil ergo obſtat, qvò minus, rationes exceſsûs & defectûs invicem conferantur. Quod enim definitionem illam Euclidis attinet, *ea nempe comparari invicem deberé; qvæ ejuſdem ſunt generis*, nullo modo nobis adverſatur. Rationes enim exceſsûs & defectûs, non genere differunt, ſed ſpecie. Genus autem commune habent, nempe rationes. Eodem enim modo, quo animal genus hominis & bruti, *dividitur in rationale & irrationale*; qvæ quidem *diviſio*, diverſas ejuſdem generis ſpecies dat: ita etiam, ratio dividitur in exceſsûs, æqualitatis & defectûs, ut diverſas ſpecies ejuſdem generis. Atque hæ veritates tam claræ ſunt: ut ipſe quidem Meibomius, qvamvis contrarium verbis doceat, re tamen & opere eas ipſas probet. Paſſim enim in libro ſuo, ac ſigillatim pag. 106. & 104. ait rationem duplam æqualem eſſe ſubduplæ, ſeu dimidiæ; & ſeſqvialteram, ſubſeſquialteræ: quod, qvamvis ineptum plane ac falſum ſit; id tamen; quod proponimus, clare indicat; ipſum nempe Meibomium, rationes exceſsûs & defectûs invicem comparare ſecundum qvantitatem. Quicquid enim æquale alteri dicitur, id cum illo neceſſariò comparatur ſecundum qvantitatem. Æqvalia enim ſunt, quorum quantitas eſt æqualis. At ſi Meibomius rationem duplam ſeu exceſsûs, æqvalem eſſe

Digitized by Google

eſſe ait ſubduplæ, ſeu defectûs; & ſeſqvialteram etjam exceſsûs, ſubſeſqvialteræ, ſeu rationi defectûs: ergo rationes exceſsûs & defectûs ſecundum qvantitatem invicem comparat. Adeoq; poſſunt invicem comparari. Unde nullus hic lapſus, aut error, vel Euclidis, vel aliorum Geometrarum: ſed ſolius Meibomii, qvi ea fieri poſſe negat, quæ omnes Geometræ faciunt, imò qvę ipſemet facit Meibomius; qvamvis hic falſam, illi veram & rectæ rationi conformem comparationem tradant: de quo plura ſequenti capite. Hoc enim clare demonſtravimus, rationes exceſsûs cum rationibus defectûs verè conferri poſſe, ideoque male agere Meibomium, qui Euclidem Geometraſque hanc ob rem erroris inſimulat.

CAP. XVIII.

Duos vero reliqvos caſus Meibomii qvod attinet, primum nempe & ſecundum, in iis qvidem hoc unicum obſervandum eſt, qvod Euclides in comparatione rationum defectûs, eas minores ponat, qvarum antecedentia ſunt minora: eas vero majores, qvarum antecedentia, reductis rationibus ad idem conſequens, majora fuerint. Quod etiam verum eſſe, antea capite XII. & XIV. hujus libri, accurate demonſtravimus. Neque aliter communis omnium hominum intellectus, ipſumque veritatis lumen in natura reſiduum dijudicare poteſt. Si enim res mihi cum hoſte quodam eſſet, qvi exercitum ſexaginta millium arma-

Digitized by Google

torum contra me duceret: ego autem geminũ haberem exercitum, unum XL millium armatorum, alterum XX. certum eſt, ſi duos exercitus conjungerem: tum, qvoad numerum bellatorum, rationem utrinque eſſe æqvalitatis. Iuncti enim ambo mei exercitus darent LX.M armatorum, qui numerus alterius numero æqvalis eſt. Si vero propter alias cauſas, ambo exercitus colligere, locóve movere nequirem: mihi vero neceſſarium foret, uno exercitu hoſti obviam ire, maximeque rebus meis conducere judicarem, ſi illum mecum exercitum ducerem, qvi majorem ad hoſtis exercitum rationem haberet: crediderim, nullum inter omnes duces, omnéſve milites futurum, qui non eum exercitum, majorem ad hoſtem rationem habere diceret, in qvo quadraginta millia armatorum ſunt; quam eum, in quo viginti millia: adeoque, re & opere teſtarentur, rationem quadraginta ad ſexaginta, majorem eſſe, quam viginti ad ſexaginta.

Eodem modo, ſi Princeps decretum aliquod in qvibuſdã urbibus quã citiſſime propoſitum vellet, eamq; ob rem, quinq; vel ſex tabellarios emitteret, qui mandata ad quatuor vel quinque urbes præcipuas eodem intervallo à metropoli vel regia ſede remotas deferrent; unáque in pagis, vicíſque; per quas ſingulorum iter inſtituendum erat, eadem indicarent. Ad excitandum vero ſtudium ac diligentiam curſorum, præmia ſingulis proponeret, pro ratione itineris qvovis die facti: dico majora præmia eum habiturum, qui majo-

majora ſpatia confecerit; adeoque rationem itineris ipſius majorem eſſe. Sit enim in fig. XXIII. hujus libri A ſedes regia. B. C. D. E. F. urbes primariæ regni, eodem interuallo ab A diſſitæ. decurrant autem plures tabellarii, unus quidem verſus B, alter verſus C, tertius verſus D, quartus verſus E, & qvintus verſus F. Primo autem die, perveniat curſor AB in G: curſor vero AC, in H: curſor AD, in I: & curſor AE, in K: & denique curſor AF, in L. dico, eum qui eſt in G, majus præmium accepturum, quam eum, qui eſt in H, aut in I, aut in K, minus vero quam eum, qui eſt in L. eo quod plus itineris confecerit, quam vel H, vel I, vel K, minus vero quam L. Accipiunt autem præmia juxta rationem itinerum ſuorum ad totum. Eſt autem ratio itineris ejus, qui eſt in G, ut AG ad AB, ratio autem itineris in H, ut AH ad AC, & ratio itineris in I, ut AI ad AD. & ſic itineris in K, ut AK ad AE. denique ratio itineris in L, ut AL ad AF. Quoniam ergo majus præmium accipiat is, qui eſt in G, quam is qui eſt in H, aut I, aut K: minus verò quam is, qui eſt in L: ſinguli autem, pro ratione itineris ſui, quovis die peracti, præmia accipiunt; ergo, ratio AG ad AB, major erit quam AH, ad AC, vel AI ad AD, vel AK ad AE. Eadem vero ratio AG ad AB, minor erit qvam AL ad AF. Sunt vero AB AC, AD & AF æqualia. Reductis ergo omnibus rationibus ad eadem, ſeu æqualia conſequentia: ratio illa major eſſe deprehenditur, cujus antecedens ma-

 jus

jus eſt: illa autem minor, cujus antecedens minus: quod quidem antea ex claris certiſque Geometricis principiis cap. XII. & XIIII. fuit demonſtratum, unde Lector plura petat. Quid autem contra hæc Meibomius? Principium quidem tale ſupponit, quod non manifeſtè verum eſt, ſicut illa quæ in Geometricis ſupponuntur, & ex quibus ſua demonſtrauit Euclides, aliique poſt illum Mathematici: ſed quod manifeſtè falſum & ineptum eſt. Ponit enim pro principio, rationem duplam æqualem eſſe ſubduplæ ſeu dimidiæ, & ſeſquialteram ſubſeſquialteræ. Verba ejus pag. 104. *Itaque ratio* $\frac{1}{2}$, *æqualis eſt rationi* $\frac{2}{1}$ *ſubdupla duplæ*. At ſi æquales ſunt hæ rationes, dupla nempe & dimidia; dabunt proportionem Geometricam: eritque adeo, ſecundum Meibomium, ut 4 ad 8, ſic 8 ad 4, vel 16 ad 8. Hoc enim ex ipſo Meibomio liquet. Hæc enim verba ipſius ſunt pag. 185. *Itaque omnium optimè proportionem Ariſtoteles finivit rationum æqvalitatem. Verba illius ex V. Ethicorum Nicomachiorum adponam.* Η ἀναλογία ἰσότης ἐστὶ λόγου καὶ ἐν τέτταρσιν ἐλαχίστοις. *Proportio eſt rationum æqvalitas &c.* Dico autem, ſi hæc definitio analogiæ ſeu proportionis omnium optima eſt, ut ipſemet Meibomius ait: ergo convertitur. Omnis enim bona definitio debet converti ſimpliciter: ut omnis homo eſt animal rationale: & omne animal rationale eſt homo. Dicendum ergo eſt, omnis proportio Geometrica (de hac enim

enim verba facit & Ariſtoteles & Meibomius) eſt rationum æqualitas: & omnis rationum æqualitas eſt proportio Geometrica: quod & verum omninò eſt. At ſi ratio dupla & dimidia invicem æquantur: ergo illic eſt æqualitas rationum ſecundum Meibomium, adeoque proportio Geometrica. Hæ ergo rationes ſunt æquales Meibomio. 2 ad 4, & 8 ad 4. tum quoq; 2 ad 4, & 16 ad 8. Ratio enim 16 ad 8, dupla, æqvatur rationi 4 ad 8 ſubduplæ ſecundum Meibomium. Eſt autem ratio 2 ad 4, æqualis rationi 4 ad 8; cum hæc vere ſint proportionalia: quod ne Meibomius quidem negaverit. Qvæ vero eidem æqualia, etiam inter ſe ſunt æqualia. Ratio ergo 2 ad 4, eſt æqualis rationi 16 ad 8. Unde hæc ſecundum Meibomium erunt proportionalia, ut 2 ad 4, ſic 16 ad 8. Proportio enim ſecundum Meibomium eſt æqvalitas rationum; adeoq; ubi æqvalitas rationum, illic proportio. At ſi Meibomio fides, æqvales ſunt rationes 2. ad 4. & 16. ad 8. ergo etiam proportionales erunt. Idipſum, in qvadruplis & ſubqvadruplis rationibus verum erit, ſi vera dicit Meibomius, Qvoniam enim ratio dupla æqvatur ſubduplæ, tripla autem ſubtriplæ, & qvadrupla ſubqvadruplæ, atq; ſic in infinitum: ergo ratio ſubdupla minor eſt ſubtriplâ, & hæc ſubqvadrupla; atq; ſic in infinitum. Nempe unò abſurdo dato ſeqvuntur infinita. Erunt ergo, ut 2 ad 8, ſic 64 ad 16. juxta Meibomium. Equidem Marce Meibomi, ſi magno in ære alieno eſſes, crederem facile propriam

Digitized by Google

ob cauſam, hoc abs te inſipidum dogma eſſe confictum, ut magnis creditoribus magnis nugis ſatisfaceres. Si enim quiſquam centum millia æris pluribus creditoribus unive deberet; bona autem ipſius non niſi millia æris æquarent: tuâ quidem doctrinâ multum proficeret: cunctiſque creditoribus facile ſatisfaceret. Cum enim ratio bonorum ipſius ad debitum, ſit ſubcentupla; ratio autem debiti ad bona centupla: juxtà te autem, ratio centupla & ſubcentupla æqualis: ergo, cum ratio bonorum ad debitum, quæ eſt ſubcentupla, æquetur rationi debiti ab bona, ſeu centuplæ: omnibus ergo creditoribus ſatisfactum eſt. In libris enim mercatorum, quando rationes crediti æquantur rationibus debiti: omnia ſalua ſunt, fideſque arcæ integra. Omnibus ergo obæratis magnam hac in parte gratiam faceres: ſi tamen verborum Chriſti meminiſſe nollent. *Quodcunque vultis ut vobis faciant homines, id & facite iis. & quod tibi non vis fieri, alteri ne feceris.* Sane Marce Meibomi, non mihi perſuadere poſſum, hanc doctrinam tibiipſi placituram. Si enim quis tuę illius pulchræ ſapientiæ cupidus, binis menſibus operam tibi navare vellet, atque pro illis octo tibi aureos polliceretur: poſtea vero pro cœteris omnibus menſibus proportionaliter. Tranſacto autem *XVI.* menſium ſpatio: quando tu nummos tuos rogares: is pœnitentia ductus, quod bonas horas tam malè locaſſet, tergiverſari inciperet, teque tuis artibus peteret: crediderim facile, id gratum tibi non futurum, ſi pro

ſi pro 64 aureis, ſolos tibi qvatuor numeraret. Neque tamen ulla te injuria afficeret: cum ex tuis principiis hanc ſapientiam hauſiſſet. Pollicitus enim eſt, ſe tibi proportionaliter pro cœteris menſibus daturum. At vero, juxta te, ubi æqualiras rationum; illic proportio. Sunt vero juxta te, æquales hæ rationes, 16 ad 64, & 16 ad 4. Ratio enim 16 ad 4 eſt qvadrupla. Ratio autem 16 ad 64 ſubquadrupla. At ſi ęquales hę rationes, ergo hic eſt æqualitas rationum, adeoque proportio. Dabit ergo tibi juxta tuam proportionem quatuor aureos, pro ſexaginta quatuor aureis. Ego quidem, aliique omnes mortales calculum ita ponemus: ſi duo menſes dant octo aureos, ergo 16. menſes dabunt ſexagintaqvatuor aureos. Nam ut duo ad octo, ſic ſedecim ad ſexaginta qvatuor. Is autem tuæ ſapientiæ conſultus reſponderet, ut ſedecim ad ſexaginta qvatuor, ſic ſedecim ad quatuor. Sunt enim rationes hæ, æquales invicem, quadrupla nempe ſubquadruplæ: adeoque vere hæc ſunt jnxta te proportionalia. Unde is, qui pro duobus menſibus octo aureos promiſerat: proportionaliter, hoc eſt, juxta tuam proportionem, pro ſedecim menſibus tantum qvatuor aureos daret. adeoq; tua tibi ſapientia nocumento ac detrimento foret. Eqvidem non dubito, qvin pro egregia tua prudentia, aliqvod effugium qværas, ne tam claræ veritates cæcutientem te lumine ſuo enecent. Nam & exceptionem qvandam proponis. Dicis enim rationem duplam æqvalem eſse ſubduplæ

duplæ in ſuo genere. Sed exiſtimás ne qvemqvam ſapientum adeo ſimplicem fore, ut tuis ſibi verbis imponi patiatur. Qvid eſt æqvale, Marce Meibomi? Id qvidem qvod eandem qvantitatem habet: ſeu, cui altera ejuſdem generis quantitas ęqvalis datur. Si enim diverſi generis qvantitas fuerit: non comparantur invicem. Ita ergo duę ulnę Selandicę ęqvales ſunt qvatuor pedibus Rhinlandicis in ſuo genere, hoc eſt in magnitudine. Quoad numerum enim, ęqvales non ſunt. Omnes ergo res quę ęqvales dicuntur: ſecundum idem genus quantitatis tales eſſe dicuntur. Quod ergo ais, rationes exceſſus & defectûs invicem eſſe ęqvales, duplam nempe ſubduplę, & triplam ſubtriplæ, in ſuo genere: nihil aliud dicis quàm eo modo eſſe ęqvales quo aliæ omnes res quę ęqvantur ſibi, etiam ſunt ęquales: hoc eſt quatenus eandem vel ęqualem ejusdem generis quantitatem habent. At ſi hoc modo ęquales ſunt: etiam proportionales juxta te erunt: omnesque illę abſurdę concluſiones, quas antea propoſui, juxta te erunt veriſſimæ. Qvod ſi alio in genere conſiderari hæc velis, qvàm juxta qvod comparantur: nihil quidem Euclidi contrarium dices, ſed magno conatu magnas nugas ages. Si enim Sophiſtarum more progredi volueris facile doctrinam hanc tuã confirmabis. Qvatuor enim pedes æqvantur binis ulnis. At qvaternarius eſt duplus binarii: ergo duplum æqvatur dimidio. Hæc qvidem inter ſophiſtica proponi poſſunt. Sed apud ſapi-

ſapientes viros, ne audiri qvidem digna ſunt. Qvoniam enim duæ ulnæ qvatuor pedes faciunt, ergo magnitudo utrinq; eadem eſt: qvamvis, ob diverſitatem menſuræ, alio atq; alio numero exprimatur. Tum qvoq; Logici contra hanc argumentationem ſtatim dicent, qvatuor in ea terminos eſse. Major enim agit de magnitudinibus: minor, de numeris. Qvamvis ergo duæ res, aliqvando, non qvatuor tantum, ſed & mille & centum mille rebus ſint majores: non tamen ideo dimidium aut ſubmillecuplum, duplo aut millecuplo majus eſt. Dupla enim qvantitas eſt, qvæ aliam qvantitatem bis in ſe continet. At magnitudo qvatuor pedum magnitudinem duarum ulnarum ſemel tantum in ſe continet. Adeoq; ipſius dupla non eſt. Unde nec dupla ratio ullo modo probatur rationi dimidiæ eſse æqvalis. Poteſt enim fieri, ut duę res fiant ęqvales qvatuor rebus: ſicut duæ ulnę ęqvantur qvatuor pedibus. Neq; tamen ideo dimidium ęqvatur duplo.

CAP. XIX.

Sed ut vaniſsima hęc argumenta & exceptiones Meibomii cuivis ob oculos ponantur; & qui ratiocinari nouit, faciliori negocio omnia perſpiciat: hoc capite argumenta qvędã, Syllogiſmo incluſa, proponam.

Qvicqvid majus, minus aut æqvale dicitur, id ſimpliciter tale eſſe cenſetur, qvoad qvantitatem. Ratio major, minor, aut æqvalis alteri dicitur, tam Meibomio

bomio qvam Euclidi. Ergo talis ſimpliciter eſſe cenſetur qvoad qvantitatem. Major propoſitio eſt clara. Nihil enim in Geometricis, majus, minus aut æqvale eſſe dicitur, niſi reſpectu quantitatis ipſius. Scio qvidem alicubi, in uſu vulgari, formulas qvaſdam dari, qvæ aliter explicari poſsunt. Sed Euclides, contra qvem diſputat Meibomius, propriè & accuratè loqvitur. Si ergo hunc falſi arguere velit Meibomius, etiam propriè & accuratè loqvatur: ut id falſum eſſe demonſtret, quod Euclides verum eſſe dicit. Minor propoſitio eſt utrinq; conceſsa. Non enim diſputat Meibomius, an rationes qvantitatem habeant: ſed poſito, qvantitatem eas habere; dicit, Euclidem in eo falſũ fuiſse, qvod eas minores dixerit, qvæ reverá ſunt majores. Si ergo ratio una altera minor eſt, & major: certe rationes qvantitatem habent ſecundum Meibomium: & qvatenus quantitatem habent, majores minorésve aut æquales dicuntur. Concluſio ergo clara eſt. Unde rurſum tale argumentum in medium adduco.

Ex qvo ſolo qvantitas rei alicujus dependet; ex hoc ſolo, magnitudo, æqvalitas & parvitas rei dependet. Ex ſola qvantitate antecedentis termini reſpectu conſequentis dependet omnis illa qvæ in rationibus conſideratur qvantitas. Ergo ex ſola qvantitate antecedentis termini reſpectu conſeqventis, magnitudo, parvitas aut æqvalitas rationum dependet. Major clara eſt, ex præcedentibus. Minor etiam omnibus

cog-

cognita eſt. Si enim, antecedens terminus conſeqventis duplus ſit; ratio eſt dupla: ſi conſeqventis triplus, ratio eſt tripla: ſi conſequenti æqvalis, ratio eſt æqvalitatis: ſi conſeqventis ſubduplus, ratio eſt ſubdupla: atq; ſic in infinitum. At duplum eſſe, triplum eſſe, ſubqvadruplum eſſe, eſt illa qvantitas quæ in rationibus conſideratur. Concluſio ergo manifeſta eſt, qvod ex ſola qvantitate antecedentis termini, reſpectu conſeqventis, magnitudo, parvitas aut æqualitas rationum dependeat.

Illud ergo quod antea Geometricè capite XIV. demonſtravimus, ex hoc noſtro Syllogiſmo veriſsimum eſſe cognoſcitur: nempe, reductis binis rationbus ad idem conſequens, illam majorem eſſe, cujus antecedens majus: illam verò minorem, cujus antecedens minus. Quoniam enim ex qvantitate antecedentis termini, reſpectu conſeqventis, dependet magnitudo, parvitas & æqvalitas rationum: ergo, quarum antecedentia, reſpectu ejuſdem cotſeqvenris, majora ſunt; eæ rationes ſunt majores: & qvarum minora, illę minores: deniq;, qvarum antecedentia æqvalia, illæ rationes æquales. Veritas ergo certiſsima aſsertionum Euclidearum antea pluribus demonſtrata, hinc quoq; clariſsimè patefcit. Unde falſitas dogmatum Meibomii una patet. Quod enim vero contrarium eſt: id falſum eſt. At Meibomius contraria hac in re Euclidi ſe aſserere gloriatur. Quicquid ergo excipit, & qvocunq; modo ſe expedire conatur Meibomius, vanus falſusq; deprehen-

henditur. Quibuscunq; enim verbis hęc explicuerit, niſi id ipſum planè, vel verbis, vel re dixerit, qvod Euclides; falſum planè dicet, utpote vero contrarium. Si verò, ſua ita interpretari voluerit, ut cum Euclide conveniant; jam ideo falſus eſt, qvod Euclidem falſò accuſaverit. Verùm neq; crediderim, Meibomii verba ullam talem explicationem latura. Clare enim & perſpicue ait: *Rationem duplam æqvalem eſſe ſubduplæ hoc eſt dimidiæ*, unde & tripla ſubtriplę ęqvalis erit; atq; ſic in infinitum progrediendo. Hoc enim fundamentum eſt argumentationis Meibomianæ. Si enim ratio dupla ęqvalis eſt ſubduplę ſeu dimidię, & ſubtripla ęqvalis triplę, atq; ſic conſeqventer: ergo cum ratio tripla ſit major dupla; erit & ſubtripla, major ſubdupla. Sed eodem jure concluſerim ego, ſubtriplam rationem majorem eſſe dupla. Quod enim Meibomius ait æqvales eſſe rationes duplam & ſubduplam in ſuo genere, id ſententiam ipſius plane non juvat. Qvatuor enim pedes Rhinlandici æqvales ſunt duabus ulnis Sælandicis ſeu noſtris in ſuo genere, hoc eſt, in magnitudine: qvoad numerum enim æqvales non ſunt. Adeoqve, qvicqvid æqvale eſt, æqvalem habet qvantitatem in eo, juxta qvod æqvale dicitur. Rationes ergo dupla & ſubdupla, ſi in ſuo genere, hoc eſt qvatenus in uno genere conveniunt, æqvales ſunt: invicem ergo eandem vel æqvalem habebunt qvantitatem. Æqvalitas enim in Geometricis ex ſola qvantitate æqvali dependet. Argumentum

tum igitur tale ſit. *Qvicquid æqvale alteri eſt, id æqvalem alterius qvantitati qvantitatem habet. Rationes ſubdupla & dupla Meibomio æqvales ſunt. Ergo æqvalem habent qvantitatem.* Quantitas autem rationis duplæ eſt dupla, & qvantitas rationis ſubduplæ eſt ſubdupla. Ergo qvantitas dupla æqvatur quantitati ſubduplæ ſeu dimidiæ. Quo poſito, jam ex falſis conſeqventiis Meibomii argumentor. Si qvantitas dupla æqvatur ſubduplæ: ergo qvatuor pedum magnitudo æqvalis eſt duum pedum magnitudini. Sed falſum poſterius: ergo & antecedens. Ergo & ea omnia falſa, unde hæc tam vana dependent.

Alterum autem argumentum, ex qvo hoc manifeſtè falſum problema probare conatur: æqve qvidem falſum eſt, ſed minus ferendum: qvod in impium qvoddam dogma Meibominm detruſerit. Dicit rationes duplam & ſubduplam æqvali intervallo abeſſe à ratione nihili: ideoqve, inter ſe eſſe æqvales. Ut autem ſcias qvid ratio nihili Meibomio ſit, ipſum loqventem audi pag. libri ſui 190. lin. 18. *Cæterum illarum rationum mediam, qvæ ex æqvalibus terminis conſtat, qvam propterea æqvalem veteres appellârunt, nihili rationem vocat Euthymius, qvemadmodum* o *nota nulla ſeu ſiphra in abſolutis numeris nihilum ſignificat. Illas autem rationes, qvæ ex inæqvalibus terminis conſtant; qvarum infinitus numerus eſt ab utraqve parte nihili rationis ita diſcriminat, ut*

 qvarum

qvarum antecedens terminus major eſt termino conſeqvente, adeoqve nihili ratione ſunt majores, λόγους ὑπερβολικοὺς Exceſsivas rationes, generali nomine adpellet: ſed qvarum contrà antecedens terminus minor eſt termimo conſeqvente, qvæ ideo nihili raiione ſunt minores, eas vocat λόγους ἐλλειπτικοὺς rationes Defectivas. qvomodo ratio $\frac{9}{4}$ *eſt exceſsiva, cujus defectiva eſt* $\frac{4}{9}$. Hæc ſunt ipſius Hermotini verba ſub Euthymii, hoc eſt Meibomii perſona prolata. Verum vel hinc clarum fit, qvanta ſit vis veritatis, ut etiam nolentes trahat. Ipſemet Meibomius ait rationes exceſſûs eſſe majores ratione nihili, rationes vero defectûs, minores ratione nihili. At ſi rationes defectûs ſeu defectivæ ſunt minores ratione nihili; ratio autem nihili minor rationibus exceſſûs: ergo, & rationes defectus minores ſunt rationibus exceſſus: adeoqve ſubdupla ratio minor ratione dupla, neqve eidem æqvalis. Hæc clariſſime fluunt ex ipſius Meibomii verbis, qvæ ipſemet ſibi ipſi tribuit: qvæq; iuter eſſentialia doctrinę ſuę proponit. Sed & planè certiſſimum illud principium pro vero agnoſcit, *rationes illas majores eſſe, qvarum antecedentia majora: minores autem qvarum antecedentia minora.* Verba ejus clariſſima ſunt, qvę antea adduxi, qvęqve hoc ſimpliciter indicant: ideo rationes defectivas, nihili rationibus eſſe minores, qvod earum antecedentes termini minores ſint termino conſeqvente: exceſſûs

autem

autem rationes, ideo majores ratione nihili, qvod antecedens illarum terminus major ſit termino conſeqvente. At ſi ideo rationes ſunt majores, minorésve ratione æqvalitatis; qvia antecedens terminus eſt major minórve conſeqvente termino: ergo, qvarum antecedens terminus major eſt, illa ratio major: & qvarum antecedens terminus minor eſt, illa minor. Qvod certiſſimum veriſſimumqve pincipium, antea capite XII. & XIV. demonſtravimus. Neque Meibomius excipere poteſt hæc ſe ex aliorum mente dicere: cum & Euthymii ſententiam recitet, hæcqve claris & abſolutis verbis proponat. Sed Meibomiani dogmatis conſtantiam antea monſtravimus capite XVII. de ratione æqvali & proportionem generante. Id vero prœterire neqveo, qvod ait, *rationem æqvalitatis* ſeu *qvæ eſt inter duas res aut terminos æqvales, ſe vocare rationem nihili*: præſertim cum in præfatione ſcripti ſui dicat *Deum ipſum conſiderari in ratione nihili.* At ſi Deus conſideratur in ratione nihili, conſideratur in ea juxta Meibomiũ, qvæ duos terminos æqvales habet. At termini non ſunt in Deo. Quicqvid enim in eſſentia Dei eſt, Deus eſt: neqve ab eſſentia ullo modo diſtingvitur. Vnus ergo terminus cum Deus ſit: alter terminus erunt res creatæ. Præter Deum enim nihil eſt non creatum. Cum ergo Deus conſideratur in ratione nihili, hoc eſt, ex ſententia Meibomii, illa, qvę duos terminos æqvales habet; erunt ergo æqvalia Deo: ſed hoc

falſum

falſum iiſq; contrariũ qvæ ait Propheta, imo Deus ipſe apud Eſaiã. *Cui rei comparabitis me?* Si enim conſideratur in ratione nihili, habet alium terminum ſibi æqvalem. At unus tantum Deus eſt: cętera omnia creata. Ergo creatura alter terminus erit: hęcqve Deo ęqvalis, ſi credimus Meibomio. Eqvidem non tam impium Meibomium arbitror, ût hęc aſſerat: At debebat ſibi in memoriam revocaſſe Poetę illud:

Qværite materiam veſtris, qui ſcribitis, æqvam Viribus,

neqve ea tractâſſe qvę non intelligit. Quid porrò eſt ratio nihili? Certè, omnes res, ſi cum Deo comparentur, verè ſunt in ratione nihili. Sunt enim ut nihilum. *Omnes enim gentes qvaſi nihilum & inane reputatæ ſunt ei* Eſaię XL. Hęc ergo eſt ratio nihili, qvando aliqvid, cum nihilo comparatur. Eſt enim ratio nihili ad aliqvid. Tum qvoqve ratio finiti ad infinitum certo modo poteſt appellari ratio nihili: qvod nulla dari poſſit comparatio inter finitum & infinitum, non magis, qvàm intet aliqvid & nihil. Talis autem non eſt ratio æqvalitatis. Eſt enim inter duas res ęqvales. Ineptit ergo Meibomius, qvi heic nodum in ſcirpo qvęrit. Optimè enim ratio hęc, qvę eſt inter duos terminos ęqvales, ratio ęqvalitatis appellatur. Malè autem imò peſſimè ratio nihili vocatur, pręſertim ſi Deus juxta Meibomium in hac ratione conſiderari debeat: cum nil, prętér Deum, ęquale ſit Deo.

Quod

Digitized by Google

Qvod autem rationes exceſſivas & defectivas Meibomii attinet: nihil in iis novi, qvoad res ipſas, invenit Meibomius. Sunt enim eædem, qvas omnes Geometræ ſub nominibus majoris minorísve æqvalitatis cognitas habent. An vero inde egregiam laudem, ac ſpolia ampla referat, qvod duas voces barbaras in Geometriam introduxerit? id ſapientibus dijudicandum relinqvo. Satis eſt, nihil eum novi inveniſſe, aut Geometras hac in parte docuiſſe.

Ab hac autem ratione æqvalitatis, qvam ille nihili vocat, rationem duplam & ſubduplam æqvali remotam intervallo Meibomius ait: unde concludit, æqvales ipſas rationes eſſe. Argumentum ejus ſyllogiſmo comprehendam, ut inſignem omnes Meibomii dialecticam admirentur. Hoc ergo eſt. Quæcunque æqvali intervallo ab æqvalitate diſtant, ea inter ſe ſunt æqvalia. Rationes dupla & ſubdupla æqvali ab æqvalitate diſtant intervallo. Ergo ratio dupla & ſubdupla ſunt inter ſe æqvales. Sed, non mirum eſt, qvòd Meibomius Euclidi contraria ſcribat: cum ipſemet, ne eas quidem veritates perſpicere valeat, qvæ longè ſunt clariſſimæ. Sane, concluſio ipſa, in hoc argumento, facilè ipſum docere poterat, præmiſſa non eſſe vera. Utraque enim propoſitio non tantum probatione indiget; ſed & falſa eſt. Audiamus tamen Meibomium hæc explicantem pag. 106. 107. & 121. & propria principia evertentem. *Cum itaqve ratio ſeſqvialtera $\frac{6}{4}$ tanto ſpatio abſit à ratione nihili*

 hili

hili $\frac{4}{4}$. *quanto ſpatio ab eadem nihili ratione* $\frac{4}{4}$ *abeſt ratio ſubſeſquialtera* $\frac{4}{6}$; *hæ duæ rationes ſeſqvialtera & ſubſeſqvialtera inter ſe ſunt æquales ; quamvis non ſint eædem : quod una tanto exceſſu nihili rationem ſuperet, qvanto defectu altera à nihili ratione deficit : ſeu qvod una tanto ſpatio ad dextram diſtet, quanto altera ad ſiniſtram. Inter ſe autem duæ hæ rationes ſeſqvialtera & ſubſeſqvialtera diſtant ratione biſſeſqvialtera ſeu duplaſuperquarta, qvod etiam ex additione fit manifeſtum ...... Similiter ratio biſſeſquialtera, ſeu duplaſuperqvarta* $\frac{9}{4}$ *major eſt, qvam ratio ſubbiſſeſquialtera, ſeu ſubduplaſuperquarta ratione quaterſeſquialtera, ſeu ratione biſduplaſuperqvarta, hoc eſt ratione qvintupla ſuperſextadecima.* Pagina vero 121. ait. *Eſſentia autem ſua ſubdupla ratio æqvalis eſt rationi duplæ ; qvia diſtantia magnitudinum utriusqve rationis eſt æqvalis. qvippe inter duplæ rationis magnitudines* $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{H}$ *tanta diſtantia eſt, qvanta inter ſubduplæ rationis magnitudines* $\frac{M}{N}$, $\frac{O}{I}$. *At vero, cum in diverſas partes hæ rationes tendant, dupla aſcendendo, deſcendendo ſubdupla: ratio dupla ſuperat rationem ſubduplam ratione qvadrupla. Superat autem ratio qvadrupla rationem ſubqvadruplam ratione ſedecupla.* Hæc verba ipſius Meibomii ſunt: qvę ne à me confiċta arbitreris, ipſum ut legas peto. Videbis enim nil magis ſibi ipſi unqvam contrarium: nil, qvod plura abſurda ſimul continuerit. Si enim ratio dupla ſuperat ſubduplam, & qvadrupla ſubqvadruplam

druplam; ut diſertis verbis heic affirmat Meibomius: ergo ratio dupla major eſt ſubdupla: & quadrupla ſubqvadrupla. Quod enim certa qvadam parte aliud ſuperat, id majus eſt. Imò diſertis verbis affirmat Meibomius rationem $\frac{9}{4}$ ſeu biſſeſqvialteram ſive duplamſuperqvartam majorem eſſe ratione ſubbiſſeſqvialtera ſeu $\frac{4}{9}$. At ſi ratio 9 ad 4, major eſt ratione 4 ad 9. cauſa noneſt, qvin ratio 8 ad 4, etiam major ſit quam 4 ad 8. adeoque dupla ratio, major ſubdupla. Quod quidem longè veriſſimum eſt: ſed Meibomio plane contrarium. Ipſemet igitur propria principia penitus evertit.

Sed his omnibus ſepoſitis, formetur argumentum, ex terminis Meibomianis, pro confirmatione majoris propoſitionis in dato ſyllogiſmo. Hoc ergo tale erit. *Qvarumcunqve rationum magnitudines æqvaliter diſtant, illæ rationes ſunt æqvales. Rationum duplæ & ſubduplæ magnitudines, æqvaliter diſtant. Ergo; rationes dupla & ſubdupla ſunt æqvales.* Major minorqve eſt Meibomii, ipſáqve concluſio Meibomiana. Sed omnia æqve falſa. Magnitudines autem vocat Meibomius terminos rationum. nempe in fig. libri ſui, paginâ 120, magnitudines rationis duplę ſunt lineæ EF GH, magnitudines vero rationis ſubduplæ ſunt lineę MN, OP. Diſtantiam vero vocat, qvando antecedens rationis exceſſûs conſequens eadem qvantitate excedit, qua antecedens rationis defectûs. Ita enim in ſchemate ponit EF excedere magnitudinem HG.

eodem intervallo, ſeu eadem quantitate FH, qua MN exceditur à PO. nempe NP. Malè quidem voces diſtantiæ & intervalla huic rei applicantur. Quæcunque enim diſtantia fuerit terminorum ejuſdem rationis: eadem ſemper eſt ratio. Si enim EF fuerit 8. pedum, HG autem 4 pedum: ſive magnitudines hæ unam faciant lineam in duas partes inæquales diviſam; ſive vaſtiſſimo intervallo ſejungantur, & tanto qvantum eſt ab extimo cœlo ad hunc noſtrum orbem: eadem ſemper eſt ratio. Malè ergo Meibomius vocibus hiſce utitur. Indicat vero per hæc differentias exceſſus & defectus; ſicut ex ſchemate ipſius patet: ut jam vidimus. Hæc ergo Meibomii propoſitio erit claris verbis concepta, *illa ratio æqvalis eſt alteri, cujus exceſſus, alterius defectui, æqvatur.* At hoc falſum eſſe clariſſime liquet. Sint enim duæ rationes 20 ad 18, & 16 ad 18, una exceſſus, altera defectus. Jam exceſſus unius æquatur defectui alterius. Si enim auferatur á 20 exceſſus ultra 18. hoc eſt, binarius; ipſi autem 16 addatur defectus ab 18 ſeu binarius: remanet utrinque ratio æqualitatis, nempe 18 ad 18. Diſtant ergo magnitudines harum rationum æqualiter ab ęqualitate. Unde juxta Meibomium hæ rationes erunt ęquales, ſeſquinona, ſubſeſquioctavæ. 20 ad 18, ſeu 10 ad 9, rationi 16 ad 18, ſeu 8 ad 9. Eodem modo, ratio 6 ad 12, ęqualis erit rationi 18 ad 12. Si enim ſenarius, qui eſt exceſſus 18 ſupra ęqualitatem ſeu 12, auferatur à 18, idemque addatur ſenario; habetur æquali-

qualitatis ratio, nempe 12 ad 12. At juxta Meibomium. *Quarum rationum magnitudines, ſeu termini æqualem diſtantiam habent, eæ rationes ſunt æquales.*

Termini autem, (ita enim loco laudato ipſemet Meibomius explicat, magnitudines) rationum 18 ad 12. & 6 ad 12. æqvaliter diſtant ab æqvalitate ſeu à 12. Tanto enim intervallo abeſt 18 à 12 in exceſſu, qvanto ſex à 12 in defectu. Ergo ratio 6 ad 12 ſeu ſubdupla æqvatur rationi 18 ad 12 ſeu ſeſqvialteræ. Qvæ qvidem omnia vana ſunt ac falſa. Unde & præmiſſa falſa ſunt. Video qvidem originem erroris Meibomiani, qvem & antea attigi. Nempe, cum ex Mathemathicis didiciſſet, proportionem qvandam eſſe (nempe Arithmeticam) qva exceſſus unius termini, æquatur defectui alterius: ſciret autem in proportione Geometrica rationes eſſe æquales: ergo, confuſa proportione Geometrica & Arithmetica, id illi tribuit, quod huic tantum conveniret. Verum enim eſt, in proportione Arithmetica, unam magnitudinum tanto interuallo excedere æqualitatem, quanto altera ab æqualitate deficit. Sed id in proportione Geometrica verum non eſt. Tum enim Arithmetica & Geometrica proportio eadem eſſet. Diſtinxêre autem Veteres ſapienter inter haſce duas: ſicut ex Platone antea planum fecimus. Neque Meibomius probe argumentabitur, ſi, cum Euclides de proportione Geometrica aliquid demonſtret: is illud verum non eſſe dicat in proportione Arithmetica. De eo enim dubium

bium non eſt : neque id, vel Euclides, vel ullus Geometrarum affirmat : ſed contraria docent qui de eo quicquam ſcripſêre.

CAP. XX.

Atque ex his liquet, etiam alterum membrum argumenti Meibomiani falſum eſſe: nempe, rationes duplam & dimidiam ſeu ſubduplam æqvaliter diſtare ab æqvalitate. Primò enim verum non eſt, magnitudines harum rationum ęqualiter diſtare ab ęqualitate, ut ipſe Meibomius ait: ſeu, quod idem eſt, juxta ſchema Meibomii, exceſſum unius magnitudinis ęquari defectui alterius. Si enim rationes comparari invicem debent, omnino prius ſunt reducendę vel ad unum conſequens ambę, vel ad unum antecedens: alias de quantitate earum nihil certi affirmari poterit. Quæ enim menſurari debent invicem, ad communem menſuram neceſſariò ſunt applicanda. Si enim agrũ qvendam perticâ incompertæ longitudinis menſuraveris, alium vero agrum decempedâ; quantitas agrorum inter ſe non datur, quíve alterum excedat majórve ſit. Ita quoque rationes quę inuicem menſurantur, ad communes terminos, vel idem conſequens, vel antecedens ſunt reducendę. Hoc vero ſi fiat: nunquam antecedens rationis duplę, eodem interuallo excedet conſequens, quo antecedens rationis ſubduplę exceditur à conſequente. Conferantur enim inter ſe rationes 20 ad 10, & 30 ad 60. quarum quantitas ut perſpiciatur:

Digitized by Google

tur: reducantur ad commune conſequens, vel antecedens: ſitque ratio 5 ad 10 æqualis 30 ad 60. Ratio autem 20 ad 10 eſt dupla; ratio 5 ad 10 ſubdupla. At major eſt diſtantia 20 & 10, quam 5 & 10. Quod ſi Meibomius urgeat ſe neceſſariò duos tantum terminos conſiderare velle: ajo ipſum lucem fugere, atque ex iis argumentari, unde nulla demonſtratio. Si enim dicat rationem AB ad BC in fig. XXIV. ęqualem eſſe rationi BC ad AB, quia AB eadem magnitudine excedit ipſam BC, qua BC exceditur ab AB: dico id falſum eſſe, neque ex ullo certo principio probari. Imo contrarium ex claris principiis patet. Sit enim AB 20 partium, qualium BC 10. Eſt ergo, ut BC ad AB, hoc eſt, ut 10 ad 20, ſic BD ad BC, ſeu 5 ad 10. Ratio ergo DB ad BC ſeu, 5 ad 10 eſt ęqualis rationi BC ad AB ſeu, 10 ad 20 At ratio BC ad AB juxta Meibomium eſt æqvalis rationi AB ad BC. ergo & ratio DB ad BC juxta eundem ęqualis erit rationi AB ad BC. Quę enim eidem æqvalia, etiam inter ſe ſunt æqvalia. At ſi hoc verum: utique pars ad idem æqvalem habebit rationem toti. Quæ autem æqvalem ad idem rationem habent, ea inter ſe ſunt æqvalia. Ergo pars erit æqvalis ſuo toti. Hæc ſunt conſeqventiæ Meibomianæ. Qvod veró ait Meibomius ideo rationem ſubduplam ęqvari duplę, quod eadem operatione, ambæ rationes ad æqvalitatis rationem reducantur: id falſum eſt. Verum qvidem eſt mutua antecedentium & conſeqventium multiplicatione reduci ambas ad æqvali-

qvalitatem. Sed hujus rei ratio ex præcedentibus petenda eſt. Quando enim ratio exceſsûs conjungitur cum ratione defectûs, tum, illa qvidem dividitur ac imminuitur, hæc autem componitur atque augetur. Ideoque, in illa conjunctione duplex eſt operatio, hujus qvidem diviſio, alterius vero compoſitio. Antea enim demonſtravimus omnes rationes fieri ex ratione æqualitatis, exceſsûs qvidem componendo, defectûs vero dividendo. Si ergo defectûs rationes ad æqualitatis rationem reduci debeant: contraria operatione id fieri oportet, nempe componendo: & ſic rationes exceſsûs dividendo. Eodem modo, qvo ſi magnitudo BD foret ſubſeptupla ipſius BC, AB autem ejuſdem BC ſeptupla, ſi AB divideretur in ſeptem æquales partes, & BD multiplicaretur ſepties, factum utrinque foret æquale. Ita etiam ſi ratio ſubſeptupla per ſeptuplam componatur, & ratio ſeptupla per ſubſeptuplam dividatur; utrinque prodit æqualitas: cujus rei demonſtratio ex iis petenda eſt, quæ de diviſione & compoſitione rationum antea ſunt dicta. Liqvet ergo ex his, ea omnia quę Meibomius contra Euclidem adducit, non tantum incertis & dubiis, ſed & plane falſis principiis niti. Neq; aliter fieri poterat. Cum enim certis ex principiis demonſtratum antea dederimus, Euclidis aſſertiones longe eſſe veriſſimas; impoſſibile plane eſt, contrarium ipſarum falſum non eſſe. Nihil enim ſimul verum & falſum eſſe poteſt. Quod autem exempla ipſius attinet, ea omnia, vel nihil plane concludunt, vel id

id quod nos hucuſque demonſtravimus. Adeoque nulla in re ipſi uſui ſunt. Quæ enim itinera inter ſe ſunt æqualia, ſive à dextris, ſive à ſiniſtris, ſive ad Orientem, ſive ad Occidentem inſtituantur: ſemper ſunt æqualia. Unde id, quod eſt in quæſtione, probare nequeunt, rationem duplam æquari dimidiæ. Quid enim ad rem facit, ſi Sejus verſus ſiniſtram progrediendo duplum itineris Nonii fecerit: Mevius vero ad dextram pergendo, æquale quidem iter Sejo, duplum vero Octavio Nonioque fecerit? Si enim iter Seji duplum eſt itineris Nonii, æquale autem itineri Mævii: erit & iter Mævii, duplum itineris Nonii: ratioq; itineris Seji & Mævii, ad iter Nonii & Octavii æqvalis, utpote dupla: ratio vero itineris Nonii dimidia, adeoque minor. Sed neque exemplum illud, quod de mercatoribus Cajo, Lucio, Mævio, Sejo &c. ponit, huc quicquam facit. Qui enim nihil in bonis habent: neqve qvoad opes poſſunt cum divitibus comparari: cum nulla ratio ſit inter aliquid & nihil. Bona quidem cum ære alieno comparari poſſunt. Sed ut duæ res, quę quantitatem habere conſiderantur. Ac ſi bona excedant debitum: ratio quidem bonorum eſt exceſsûs: ſi vero debitum excedat bona, ratio æris alieni eſt exceſsûs. Adeoque, ex his nulla demonſtratio de rationibus petitur: cum utrique parti eædem rationes conveniant. Denique, quod ex Muſica adducit, ſi æqualibus chordis appendantur inæqualia pondera, uni quidem 18. alteri 12. tertiæ 8. faciet quidem

Digitized by Google

dem prima ad ſecundam, diapente intenſum : tertia vero cum ſecunda, diapente remiſſum. Quod ſi ergo illi ſoni majores ſint appellandi, qui ex majore tenſione proveniunt: major ſonus erit diapente intenſum, minor diapente remiſſum : adeoque, ratio ſonorum dependebit ex ratione tenſionum, hoc eſt, ex ratione ponderum. Unde erit in diapente intenſo ut 18 ad 12: in diapente remiſſo, ut 8 ad 12. adeoque illic ratio major, heic minor. Ipſa ergo Meibomii exempla contra ipſum concludunt.

Id ergo demonſtravimus Meibomium Euclidem cœteroſque Geometras falſi atque ignorantiæ accuſando, miras falſitates committere: & eos quidem ab errore liberos eſſe; ipſum vero Meibomium falſiſſima, quæque clariſſimis ac certiſſimis axiomatibus convincuntur, in medium adferre. Atq; hoc modo, verum quidem eſt, Marcum Meibomium nova quædam propoſuiſſe: quę tamen talia ſunt; ut nemo, qvi inter verum ac falſum diſtingvere poteſt, ea ab ipſo diſcere percupiat. In Euclide enim accuſando plane ſe inſenſatum, ſi non mente captum monſtravit: qvod ea pro veris ſupponat, quæ nemo ſana mente præditus falſum eſſe non videt: in Theone autem cœteriſque Geometris inſignem vel oſcitantiam, vel ſtuporem, vel malitiam: cum earum rerũ ignorantiã iis objiciat, qvas optime noverunt. Unde vaniſſima & falſiſſima eſt ipſius jactantia, quã pagina nona libri ſui proponit, qvamq; nos pagina 4. ſub initium hujus operis exſcripſimus. Verba iterum repetam.

repetam. *Itaq; & recentiores omnes reprehendã, qvi antiquos non intellexerunt; Et antiquos corrigam, qui male quædam prodidèrunt; Utrosque inſuper noua docturus.* Verum nec ullo vel veriſimili argumento probauit recentiores, antiquos non intellexiſſe: multo minus, antiquos Geometras male qvædã prodidiſſe. Nova autem, Geometris vel antiquis, vel recentioribus ignorata nulla plane propoſuit, præter ſomnia & deliria. quod illi verum eſſe fatebuntur, qui hæc legerint. Quæ enim de duarum linearum appropinquatione, ſine concurſu, in infinitum habet, illi ignorare nequeunt, qui lineam in infinitum, dividi poſſe norunt: quod nulli Geometræ ignotum eſt, Quod autem lineam in tres partes ſecare doceat, id faciliori methodo tyrones Geometriæ expeditum dabunt: ſicut & compoſitionem rationum. Cœtera omnia nugæ ſunt & qviſqviliæ, nec ſapientum ocio digna. Quis enim tantam ac tam effrænam aliis maledicendi libidinem: tam portentoſos errores, tam ſtolidam ac ridiculam jactantiam quieto ſtomacho ferre poſſet? Sane, vel ultima hæc, etiam Stoico, ſi non bilem ſaltem riſum moveret: cujus ego ſpecimen, ſi heic dare vellem, comœdiam forte Lectori ob oculos ponerem, & poſt Plautum, non Militem, ſed Literatorem Glorioſum conſcriberem. Conſilium quidem Meibomio dederim, ut ſi quid poſt hac in publicum edere velit, ſemper vulgatum illud ob oculos habeat.

Digitized by Google

Nec te laudâris, nec te culpaveris ipſe:
Hoc faciunt ſtulti, quos gloria vexat inanis.

Neque enim ullum videbis magis ambitioſum, qvique ſibi plus ſapientiæ tribuat, alios autem omnes præ ſe contemnat, quam mente motum, aut ſingulari quadam ſtultitia occupatum. Quod ſi exiſtimaverit ſe maledicendo pervincere velle: idem ipſi eveniet quod canibus: qvi, cum diu allios allatrarunt, ubi ſe contemni viderint, nec quicquam à quoquam opponi: demum ſilent ingratiis. Sanè, Meibomii cauſa ne hæc qvidem ſcripſiſſem, quamvis inter cœteros Mathematicos provocatus. Si enim corrigi vellet: vel privatâ admonitione id fieri poſſet. Quoniã vero quidã viri graves & prudentes, quibus ocium non eſt, iſta examinandi; ſententiam tamen ferre noluerint, ante rem probè cognitam: hiſce demonſtrare volui, omnem contra Euclidem inſtitutam accuſationem, hoc fundamento niti: *duplam rationem æqualem eſſe ſubduplæ ſeu dimidiæ: & triplam ſubtriplæ*, atque ſic porro in aliis. quod, quale ſit: ipſi nunc judicent.

Hac autem contra Marcum Meibomium ſcribendi occaſione data, etiam Secpticorum, atq; imprimis Sexti Empirici argumenta examinare ac refutare occœpi, qvi non unam aliquam veritatem, ut Meibomius, ſed omnes in Geometria, aliiſque ſcientiis evertere conatus eſt, qvamvis longe majori ingenio, & argumentis perquam ſpecioſis. Si enim Lectorem is nactus fuerit in Geometricis non probe ſubactum, facilè

facilè in errorem ipſum perducet: cujus rei nullum à Meibomio periculum, modo Lector ratione uti velit. Noſtra vero quod attinet, ita ea legi cupio, ut ſi qva in re lapſus fuerim, eô me modô Lector candidus & benevolus erroris moneat, quo ſuos ſibi nævos indicari optaret. quibus non ipſe minus obnoxius erit, ſi, agendo ſpectari velit.

Hanc veniam petimuſq; damuſq; viciſſim.

Digitized by Google

SUMMÆ CAPITUM.

LIBRI. I.

CAPUT. I.

DE materia & certitudine ſcientiarum. Cur Geometricæ & Arithmeticæ veritates, aliis omnibus in Philoſophia veritatibus ſint evidentiores? Geometras aliquando labi, in verbis, aut falſâ methodo. Hos qvi corrigunt, laude digni: qui autem falſo accuſant, vituperio. Marci Meibomii jactantia; & qvam vana: cum nihil novi invenerit, niſi qvod falſum eſt. Summa totius ſcripti.

CAP. II.

DE Sceptica Philoſophia. Auctor ſectæ Pyrrho. Hujus mores, inſtituta & vanitas. Scepticorum ſcire, eſt omnes ſcientias deſtruere. Sexti Empirici ſcripta.

CAP. III.

AN Mathematico aliquid ſit ſumendum ex hypotheſi. Quid ſit hypotheſis ex Sexto, Ariſtotele & Stoicis, juxta Proclum? Quid Ariſtarcho Samio & Archimedi? Accurata vocis explicatio. Differentia inter Axioma, Definitionem, Hypotheſin & Poſtulatum. Qvalis ſit Hypotheſis Geometrica? Definitiones Geometricæ. Axiomata Geometrica. De falſis hypotheſibus apud Geometras.

CAP.

Digitized by Google

CAP. IV.

SExti Empirici argumenta, contra Hypotheſes Geometrarum, expenduntur: &, vel nihil ad rem facere; vel, ex ipſius Sexti ſententia, falſa eſſe, monſtrantur.

CAP. V.

DE definitionibus Geometricis, earumque utilitate. Puncta, lineas, ſuperficies & corpora Geometrica, verè dari: & id eſſe, quod à Geometris eſſe dicuntur. Sexti argumenta refutantur. Punctum motum, lineam deſcribere, demonſtratur.

CAP. VI.

LIneas rectas in infinitum dividi poſſe, quamuis nunquam ad punctum veniatur. Concurrere autem in indiviſibili ſeu puncto. Lineam ex punctis non componi.

CAP. VII.

DEmonſtratur, maximam & minimam lineam, æqualia numero puncta habere: & tot in una concipi poſſe, quot in altera. Falſus ergo Sextus, qvi punctum lineæ magnitudinem explere dixit. Natura indiviſibilium, & in infinitum diviſibilium, humano ingenio non comprehenditur. Id in numeris, quadratis, cubicis, & ſic porrò progrediendo, demonſtratur: & quod, in infinitis, mille, & centum, & tria, & unum non diſtinguantur: adeoque, nec infinitorum natura percipiatur. Unde concluditur, ſi in naturalibus infinitis, nihil humana mens capit: multo minus, in diuinis.

CAP.

Digitized by Google

CAP. VIII.

SExti argumenta, quibus probare conatur, punctum eſſe diuiſibile, refutantur. Demonſtratur, nec puncta, lineæ; nec lineas, ſuperficiei corporiſve partes eſſe: quamuis eorundem ſint extrema. Punctum non eſt in loco.

CAP. IX.

AN linea ſit fluxus puncti? Superficies tangunt ſe in linea, inque infinitum dividuntur: nec tamen unquam ad lineas pervenitur.

CAP. X.

SUperficiem, neque ex lineis componi, neqve in lineas dividi. In minori ſuperficie, totidem lineas eſſe, quot in maxima, Geometricè demonſtratur: Tum quoqve, ſi mille, centum mille, imò, quotcunque invicem in latum jungantur lineæ: unam tantum lineam facere, omnis expertem latitudinis.

CAP. XI.

SExti argumentum, de circulis latitudinem efficientibus, refutatur: unaque demonſtratur, peripherias nullam latitudinem habere.

CAP. XII.

DE compoſitione & diviſione Geometrica, quomodo differt à Mechanica. Terminos in compoſitione

Geo-

Digitized by Google

Geometrica tolli, ſine corporis detrimento: & rurſum in in diviſione dari: In Mechanica vero, non item.

CAP. XIII.

DUo Sexti argumenta refutantur, unum, qvo demonſtrare conatur, lineam, qvia latitudinem menſurat, omnino latitudinem habere: alterum, Superficiem ex lineis componi, cum evolutus, ſuperplanum, Cylinder, in lineis planum tangat; planam autem ſuperficiem deſcribat.

CAP. XIIII.

DE contactu corporum, qvomodo fiat? Sexti argumenta refutantur, corporaque ſe invicem extremis tangere demonſtratur. Alterum Sexti argumentum, quod corpus Geometricum ſit imperceptibile, cum neque ſine latitudine, longitudine, craſſitiéve ſit; neque illud ſit; ideoque nihil ſit: imperitiæ arguitur. Multa enim in corpore eſſe accidentia, ſine qvibus corpus non eſt: nec tamen accidentia illa, eſſe corpora.

CAP. XV.

DEfinitio rectæ lineæ. quid ſit recta linea Euclidi? quid Archimedi? Utriuſque definitio idem concludere demonſtratur, ex Proclo: rectæque lineæ natura explicatur. Sexti argumenta contra definitionem anguli, Geometriæ non adverſatur, nec qvicquam contra hujus principia concludunt.

Digitized by Google

CAP. XVI.

DE anguli definitione. Accuratiſſima anguli definitio Geometriæ non neceſſaria. Demonſtratur angulum nec in Prædicamento Quantitatis, nec Qualitatis eſſe, contra Eudemum Peripateticum, Plutarchum Mathematicum, ejuſque aſſeclam Apollonium, & Carpum Antiochenum. Euclides non videtur in Prædicamento Relationis angulum ponere, quod ait Proclus. Angulus eſt in Prædicamento Situs. Lineam bifariam diuidi poſſe; contra Sextum demonſtratur: nec tamen punctum ideò bifariam, ullóve modo dividi: ſicut neq; in circuli diviſione.

CAP. XVII.

EUclides non omnes definitiones adduxit: ſed qvaſdam omiſit, non tantum utiles; ſed etiam aliquo modo neceſſarias. An ideo malè tractari debeat?

CAP. XVIII.

DE Axiomatibus Geometricis. Carneadis ſtultitia, qvi Axioma hoc negavit (Quæ eidem æqvalia, etjam inter ſe ſunt æqvalia) *à Galeno repreſſa. Ea quæ nunc in editione Græca Euclidis pro Axiomatibus habentur, non omnia, ab ipſo Euclide, pro talibus poſita fuiſſe: ſed tria poſteriora, vel ſaltem duo ex iſtis inter poſtulata. Videri Theonem Alexandrinum, ejúſve domeſticos, hæc ita ordinaſſe, ut nunc leguntur.*

CAP.

CAP. XIX.

APollonium & Euclidem in demonſtrando lapſos, illum qvidem, qvod ea demonſtrare conaretur, qvæ demonſtrari neqveunt, ut Axiomata; unde illud coactus fuit ſupponere, qvod minus clarum eſt: hunc autem, ea pro ἀναποδείκτοις *aſſumendo qvæ demonſtrari & poſſunt & debent.*

CAP. XX.

POſtulatum illud, qvod in Græcis Euclidis editionibus pro X Axiomate ponitur, omnes nempe angulos rectos invicem eſſe æqvales, *Geometrice à Proclo demonſtratur. Videntur Pappus pariter & Proclus ea in re* παραλογισμὸν *commiſiſſe, qvod angulos circumferentiarum recto æquales ſint arbitrati, qui tamen recti non eſſent. Ipſa horum demonſtratio examinatur.*

CAP. XXI.

POſtulatum V. ſeu Axioma XI. (juxta codices Græcos editos I. Elem. Euclidis,) demonſtratur, primùm qvidem à Ptolomæo, qvamvis minus ſufficienter: inde plenius & melius à Proclo.

CAP. XXII.

COntra Epicureos probatur, non male egiſſe Euclidem Vetereſque ante eum Geometras, qvi accurate demonſtrarunt, in triangulo rectilineo duo latera majora eſſe tertio. Dari triangula, in qvibus unum latus ſit majus binis reliqvis. Concluſio primi libri.

LIBRI. II.

CAP. I.

PRoœmium libri ſecundi. Euclidem ob qvædam omiſſa, & confuſe tradita accuſari qvidem poſſe: Meibomii tamen accuſationem longè ab hac diverſam, & plane falſam.

CAP. II.

QUid ſit qvantum, & qvotuplex? ex Archyta Tarentino. Qvid ſit ratio in Geometricis, Arithmeticis & Staticis. Termini rationum. Diviſio rationum, in æqvalitatis, & inæqvalitatis: ac harum, in exceſſûs & defectûs. Altera rationum diviſio, in effabiles & ineffabiles. Effabiles aliæ ſunt ſimpliciter tales, aliæ, potentia tantum. In arithmeticis omnes rationes ſunt effabiles. Diviſio rationum effabilium exceſſus in qvinque ſpecies: & defectus in totidem. Ratio multipla & ſubmultipla. ubi de ſubdupla, ſubtripla, ſubqvadrupla &c.

CAP. III.

DE ratione ſuperparticulari, qvæ Græcis λόγος ἐπιμόριος *dicitur: & huic oppoſita* ὑποεπιμόριος. *Ejus ſpecies variæ, ſeſqvialtera, ſeſqvitertia, ſeſqviqvarta, ſeſqvimilleſima: qvibus opponuntur ſubſeſqvialtera. Qvid ſit ratio ſubſeſqvimilleſima. In numeris, pro dignoſ-*

dignoſcendis rationibus, ſemper recurrendum erit ad primos numeros, qvi Græcis πυθμένες *dicuntur. Qvid voces* ὑπόλογος & πρόλογος *Græcis ſignificent.*

CAP. IV.

QVid ſit ratio ἐπιμερὴς & ὑπεπιμερὴς, *ſeu ſuperpartiens & ſubſuperpartiens? Qvid* πολλαπλασιεπιμόριος *ſeu multiplaſuperparticularis? Hujus variæ ſpecies, nempe duplaſeſqvialtera, duplaſeſqvitertia, duplaſeſqviqvarta; & ſic triplaſeſqvialtera, triplaſeſqvitertia &c. His autem oppoſitæ ſunt, qvibus particula ſub præponitur. Ratio* πολλαπλασιεπιμερὴς *ſeu multiplaſuperpartiens: huicque oppoſita* ὑποπολλαπλασιεπιμερὴς. *Omnes rationes effabiles paucis explicantur, tum quoq;* λόγος ὑπεροχῆς *ſeu ratio exceſsûs & huic oppoſita ratio defectus. Cur ineffabiles* κατ' ἐξοχὴν *ita appellentur.*

CAP. V.

DE rationibus ſimplicibus & compoſitis. Qvid ſit compoſitio in Geometricis. Compoſitio alia fit addendo, alia multiplicando. De additione rationum ex Euclide & aliis. Ex ratione æqvalitatis omnes rationes exceſſus componuntur. Uſus additionis rationum in Mechanicis. De multiplicatione rationum. Additione rationum ambo termini non conjunguntur. Locus Ariſtotelis explicatus. De multiplicatione rationum in lineis. Uſus multiplicationis rationum in Harmonicis.

CAP. VI.

DE diviſione rationum. Hujus natura ex partium relatione ad totum explicatur, variiſque exemplis illuſtratur, & qvomodo diviſio fiat multiplicando. Compoſitio rationum exceſsûs, qvæ κατ' ἐξοχὴν *ita vocatur, & diviſio rationum defectûs, eodem fit modo: multiplicando utroſque terminos inuicem.*

CAP. VII.

RAtio æqvalis & inæqvalis, qvid? Qvomodo rationes æqvales inveſtigentur? De multiplicatione & diviſione magnitudinum, præſertim linearum. Qvid ratio æqvalis Euclidi & Ariſtoteli? quid Theoni Smyrnæo? Hic non ſemper ſatis accuratus in ſcribendo. Marcus Meibomius falſo omnes in genere Geometras accuſat. Qvid rationes majores & minores Euclidi, Ariſtarcho Samio, Archimedi & Theodoſio.

CAP. VIII.

DE multiplicatione & diviſione rationum ſecundum modum procedendi in magnitudinibus. Simpliciſſima Methodus multiplicandi & dividendi rationes. unde etjam natura ipſa compoſitionis hujus cognoſcitur. Differentia compoſitionis & diviſionis. Propoſitio XXIII. libri VI. Elem. Eucl. explicatur.

CAP. IX.

AN Euclides Propoſ. XXIII. lib. VI. diſtinxerit inter multiplicationem & diviſionem rationum. Qvid

συγκεῖ-

Digitized by Google

συγκεῖσθαι & συντίθεσθαι *Euclidi. De definitione compoſitionis rationum Euclidea. Modus dividendi rationes defectûs per multiplicationem amborum terminorum invicem, idem plane eſt, ac ille, qvo rationes exceſſus componuntur. hujus rei cauſæ.*

CAP. X.

ADditio, multiplicatio, ſubtractio & diviſio rationum plenius atque accuratius explicantur. Probatur additiouem rationum vere & proprie eſſe & vocari rationum compoſitionem. Duplatio, triplatio, quadruplatio &c. rationum qvid ſit: ut &, quid ratio dupla, tripla' qvadrupla, ſeſquialtera? Quid ratio ſubdupla, ſubtripla. De rationum multiplicatione & diviſione: quid ratio duplicata, triplicata? ut & ſubduplicata, ſubtriplicata &c. & quomodo diſtingvantur à dupla, tripla, ſubdupla, ſubtripla &c. Meibomii error hæc confundentis: ejuſque iniqua & imperita cenſura. Qvid διπλασίων, πειπλασίων? *Geometras recte diſtinxiſſe inter rationes duplicatas & duplas. Novi heic nihil invenit Meibomius.*

CAP. XI.

MArci Meibomii temeritas, qui ſine omni cauſa, imò ſine omni ratione, Geometras inſcitiæ arguit: Græcis vero doctiſſimis, iiſque ſatis antiquis, propriæ linguæ ignorantiam objicit: cum tamen neque hi, neque illi quicqvam erraverint. Idem in Theone

Alexan-

Alexandrino accuſando, crimen falſi committit: idque duplici nomine. Falſo quoque Eutocium accuſat: ut vel neutrum legerit; vel clarè ac planè loquentes non intellexerit; vel mala fide uſus fuerit. Quid ποσότης & πηλικότης Græcis Geometris & Philoſophis? Sectatorum Lucii & Nicoſtrati error. Meibomii in his lapſus & inconſtantia. Nicomachi Geraſeni ſententia. Inſignis locus Ariſtotelis, qui optime explicat quid ſit τὸ ποσὸν: ſicut locus quidam Ptolemæi τὸ πηλίκον. Quomodo differant inter ſe ποσὸν & πηλίκον? Theo Alexandrinus & Eutocius recte rationes compoſuerunt: ideoque à calumniis Meibomii vindicantur.

CAP. XII.

AN Euclides diuiſionem rationum ignorauerit? Probatur, re & opere eam cognitam habuiſſe: atq; una demonſtratur, compoſitionem rationum, quæ ſit multiplicando, verè à diviſione rationum diſtingui. Definitiones X. & XI. lib. V. Elem. Euclid. explicantur. Methodus breuiſſima componendi & diuidendi rationes omnes, tam exceſſus quam defectus proponitur, ac Geometricè demonſtratur.

CAP. XIII.

DE medietatibus Geometricis, Arithmeticis & Muſicis. Quid ἀναλογία & proportio? Locus inſignis hac de re Platonis in Timæo à Cicerone Latine redditus. Quid ἀναλογία Theoni Smyrnæo. Infælicitas critica

Mei-

Digitized by Google

Meibomii, atque in Græcis Latiniſque, imò, & in Muſicis, imperitia & audacia. Scaliger & Commandinus iniquè atque imperitè à Meibomio accuſati. Rationes Muſicæ explicantur. Locus pulcherrimus Platonis, in Timæo, de Harmonia Univerſi & proportionibus ejuſdem explicatus. De animæ natura ex Timæo Locro.

CAP. XIV.

DEmonſtratur Geometricè, aucto antecedente alicujus rationis, eodem conſequente retento, ipſam rationem augeri & majorem fieri: imminuto autem antecedente, rationem imminui. Retento autem eodem antecedente, ſi conſequens augeatur, ipſam rationem imminui: & ſi conſequens imminuatur, ipſam rationem augeri. De ratione majore & minore: & quomodo utraque inueniatur? Ratio dupla, major eſſe demonſtratur, ſubdupla; & tripla, ſubtripla: & ſic in infinitum.

CAP. XV.

DEfinitiones rationum æqualium & inæqualium Euclidis explicantur, falſoque à Meibomio accuſari, demonſtratur Geometricè. Propoſitiones quoq; Euclidis octaua & decima libri quinti Elementorum ab iniqua & falſa cenſura Meibomii vindicantur, & veriſſimæ eſſe demonſtrantur.

CAP. XVI.

MEibomii argumenta contra prædictas Propoſitiones examinantur. Ejus vanitas, arrogantia falſumq;

ſumq; dicendi libido. Præcipui errores Meibomii, in Euclide accuſando commiſſi, recenſentur ac refutantur. Rationes exceſſus & defectus comparari invicem poſſe, demonſtratur; contra Meibomium, ex variis: imo ex ipſius Meibomii teſtimonio. Inter quæ ratio ſumatur? Mala argumentatio Meibomii. Rationes exceſſus & defectus communem menſuram habent.

CAP. XVII.

AN rationes exceſſus & defectus inuicem ideo comparari nequeant, quod multiplicatæ ſe invicem non excedant? Poſito, rationes exceſſus & defectus comparari invicem non poſſe; ne tum quidem jure Euclidem à Meibomio accuſari. Quomodo ratio defectus ita poſſit augeri, ut rationem datam exceſſus ſuperet. Inconſtantia Meibomii, qui proprium dogma euertit.

CAP. XVIII.

EXemplis illuſtratur Propoſitio illa antea Geometrice demonſtrata: qvarum antecedentia majora, eæ rationes majores: & qvarum minora; minores. *Meibomii principium Geometricum, manifeſte falſum. Falſæ & abſurdæ concluſiones ex Meibomii falſis principiis deductæ. Proportionalia Meibomio hæc erunt: ut. 2 ad 8, ſic 64 ad 16. Inventum Marci Meibomii illis quidem utile eſt, qui fraudem creditoribus facere vellent: ſed ita forte ipſi Meibomio noceret. Quid ſit æquari in ſuo genere? Quid duplum? &c.*

CAP.

Digitized by Google

CAP. XIX.

ARgumenta contra Meibomium, ipſiuſque Meibomii, Syllogiſmo includuntur: ut horum vanitas, illorum autem veritas facilius perſpiciatur. Meibomius nullo modo à falſitate liberari poteſt, ſiue idem cum Euclide dicat, ſiue contrarium: cum poſterius per ſe falſum ſit; prius vero ideo Meibomium damnet, quod falſo Euclidem accuſaverit. Ipſemet Meibomius ſua principia evertit, noſtraque ſeu Eucidis confirmat. Ratio æqualitatis malè ac inepte à Meibomio, ratio nihili appellata. Quàm imperitè de rebus ſacris loquatur, dum Deum ait conſiderari in ratione nihili. De vocibus ipſius exceſſiuis & defectiuis. Rurſum principia ſua euertit, noſtraque confirmat. Perverſa argumentatio Meibomii. Meibomius confudiſſe videtur proportionem Geometricam & Arithmeticam: unde etiam error ipſius originem ſumpſit.

CAP. XX.

TErmini rationis duplæ & ſubduplæ non ſemper invicem diſtant æqualiter. Meibomii abſurda & falſa. Probationes omnes Meibomii vel manifeſte falſæ ſunt, vel nihil concludunt, vel contra ipſum concludunt. Jactantiam Meibomii falſam vanamque eſſe. Nihil enim noui Geometras docuiſſe, quod antea ignorabant, niſi quod falſum eſſet. Neque jure, aut ulla cum veritatis ſpecie, vel antiquos, vel nouos Geometras accuſaſſe. Concluſio operis.

Digitized by Google

Scriptores qui hoc in opere laudantur, defenduntur, caſtigantur, refutantur.

ANacharſis Schyta.
Apollonius Pergæus.
Archimedes Syracuſanus.
Archytas Tarentinus.
Ariſtarchus Samius.
Ariſtophanes Comicus.
Ariſtoteles Stagirita.
Carpus Antiochenus.
Cicero.
Clavius.
Diogenes Laertius.
Euclides Geometra.
Eudemus Peripateticus.
Euſtathius in Homerum.
Eutocius Aſcalonita.
Federicus Commandinus.
Galil[illegible] Galilæi.
Geminus.
Homerus.
Juvenalis.
Lucas Valerius.
Marcus Meibomius.
Nicomachus Geraſenus.
Pappus Alexandrinus.
Plato.
Plutarchus Mathematicus.
Proclus Lycius.
Ptolemæus.
Scholiaſtes Euclid. Daſypodii.
Sextus Empiricus.
Simplicius.
Theo Alexandrinus.
Theodoſius Tripolita.
Theo Smyrnæus.
Thomas Finchius.
Timæus Locrus.

Digitized by Google

Lectori Benevolo S. P.

NOn mirabere Lector, qvod multa hoc in opere librariorum negligentia perperam edita atqve exarata invenias; qvædam vero omiſſa; alia autem bis poſita: cum, nec ego operis corrigendis tam anxiam curam impendere potuerim, gravioribus negociis occupatus; neqve alium haberem, qvem hiſce rebus præficerem: ipſi qvoqve typothetæ, ea aliqvando mutare noluerint, qvæ ego emendari mandabam. Pleraq; tamen ex literarum ſimilium, aut vicinarum permutatione nata ſunt: ac ſæpe qvidem c pro e, f pro ſ, n pro u, r pro t, & vice verſâ, poſita: in Græcis autem, κ pro η, ο pro υ, υ pro ν, χ pro ϰ. In accentibus qvoq;, tonis & commatibus coliſqve non ſemel erratum: qvæ tamen Lector per ſe facile emendabit. Ego qvædam inſigniora, qvæ inter perlegendum occurrerunt, heic annotare volui: atqve ea qvæ omiſſa aut depravata erant, indicare. Cœtera tuo Candori atqve eruditioni committo. Vale & fave, virtutiq; & veritati aſſiduam operam impende feliciter.

Digitized by Google

Corrigenda, addenda.

Numerus barbarus, ſeu prior, paginam, poſterior ſeu Romanus lineam indicat.

P*Ag.* 5. *lin.* I. methodo. 6. *IV.* accuratius 7. *II.* ἔφασκεν. *Ibid.* *III.* αἰσχρὸν 10. *I.* ὑποθέσεις. *Ibid.* *XVIII.* ὡς που φησὶν. *Ibid.* XXII. αὐλόπιστον. 11. *XV.* figura. *Ibid.* XIX fuerit. *Ibid.* XX aſſumitur 12. *XII.* ἀποσημάτων 16. *IV.* neceſſario. *Ibid.* *XIII.* οὐχ᾽ ἁπλῶς. *Ibid.* *XV.* λαμβάνη, 22. *XXVI.* foret. 23. *ult.* ἐξ. ἀνυπάρκτων 24. *XXI.* noſtrum. 31. *XVII.* extremum. 32. *XII.* punctus. *Ibid.* *XXVI.* animalcula 34. *II.* terminatam. 37. *XXIII.* qvod. 38. *VI.* eſt lineam 39. *V.* lineam. AL 40. *XVI.* compoſita, tum qvoplura. 48. XVI. infinita. *Ibid.* XXVIII. infinita 51. XVII. autem. 52. XVIII. deſcribatur ſemicirculus. 53. XII. coni. BZY. *ibid.* XVII. conus BGH. ſecentur. 54. V. portio cylindrica. XIX. qvadratum. 60. II. κατ᾽ ἰσότητα. 61. II. parallelogrammum. 65. III. infinitas numero lineas. 66. XVII. angulus FbA. *ibid.* triangulo AFb. 68. XXI. ac vaſtiſſimum. 73. IV. unicam. 75. XIX. ſententia. 85. XI. & D extremum lineæ 95. XVI. tamen 96. VI. σύνοδος. VII. ἀντίτυπον. 106. XV. ſecundum longitudinem ſumitur. 108. IX. tali *deleatur* 115. XV. *poſt* lineam eſſe *inſer.* Neque enim omne illud, qvod juxta unum punctum diſtat, lineam eſſe. 118. XI. figuras. 129. XXI. φησὶν. 130. XI. qvartum. 140. XIII. angulus BAΓ. 141. V. peripheriam BM. vel BI. 142. XVI. βζη, δηζ. 143. XVI. diagramma XIII. 144. XI. nempe βζη & *ibid.* XV. recta, binos. *ibid.* eaſdē XVI. qvæ in ζβ, ηδ. 146. VI. illud vel verſus γ. *ibid.* VIII. dempto *ibid.* IX. qvàm ηζκ. 147. XVIII. ἡ εζη. 148. III. αὐτὰς ἡ εζ, *ib.* IV. βεζ, δζε, λεγω. V. *ib.* αἱ ὑπὸ βεζ. *ib.* VII. εἰς τὰς κθ. γδ. *ib.* VIII. τὰς ὑπὸ θεζ. 151. I. objectioni. 155. XIV. figuram num. II. 157. V. Publicus. 160. VIII. Archytas.

Digitized by Google

chytas. *ib.* XX. triangulare 161. IX. ὁμογενῶν, ἢ κατὰ 164. XVI. σύμ-
μετρα. *ib.* XVII. τῆς συμμελείας. 166. XIII. ἐξ ἐλάττονος. 167. VII.
poſt multipla *Adde.* Vide tamen de his, qvæ in ſeqventibus, de partium nomenclatura traduntur. 170. VII. πάλιν ἐν τῷ 175.
VI. in infinitum. 176. XV. πολλαπλάσιον 178. XVIII. octuplo-ſeſqvicenteſima viceſimaqvinta. 179. XXII. ad 10. ſeſqviqvintam, ad 11. ſeſqviundecimam. *Ibid.* XXVII. 9 ad 12. 180. I. & II. *lege* 11. ad 12. ὑφεπίπεμπτος. ſubſeſqviqvinta & denique ὑπεφενδεκάτος ſubſeſqviundecima 11 ad 12. *ib.* IX. nempe ὑπεπιπενταμερής. *Ibid.* XI. *lege* 11 ad 5. eſt duplaſeſqviqvinta & 5 ad 11. ſubduplaſeſqviqvinta. *Ibid.* XIV. Deniqve 12 ad 5. 188. XII. *poſt verba* antecedentes componuntur *Adde.* Nihilo tamen minus vera eſt rationum compoſitio, qvamvis ab altera qvæ fit multiplicando diſtingvatur: de qvibus accuratius in ſeqventibus. 189. VII. jungantur CD. GH: tota CDGH. 191. VIII. ad duo. 190. XXV. conſtituatur in fig. num. III. ex AB. 194. VI. ratio $\frac{4}{3}$, ſeu ſeſqvitertia ~~195. XVII. qvadrati alicujus. v. g.~~ AB-CD in fig. num. I. *Ibid.* XVIII. qvadrati AF. *Ibid.* XIX. baſis AE baſeos AB. XXI. baſis AE diagonalem AC 196. XX. numerus ad numerum 198. XXVII. magnitudo AB in fig. num. IV. 200. XIII. qvales AF. *ib.* XIIII. minus BF. 201. I. *deleantur* & conſeqventia cum conſeqventibus. *Ibid.* V. & VI. *lege*, Compoſitio ergo perfecta rationum exceſſus, & perfecta diviſio rationum defectus eodem &c. 202. XXI defectus. 207. XXII. ut EA. 215. XVII. illa. 217. I. E ad C. 222. II. ΔΓ ad ΓΕ. *Ibid.* XIII. *poſt* diviſionem. *nova linea.* CAP. IX. 224. XII. factam. *ibid.* XX. enim in figu. num. XI. 225. IV. ut ΔΓ ad ΓΕ. 226. II. ΑΓ ad parallelogrammum. 231. XXVI. fig. num. XI. vectis. 233. XXV. BACDLM ſemiſſem. *ibid.* XXVIII. Adeoqve. 237. XIX. triangularia LOK. *ibid.* XXV. priſma lOL. 238. II. oL. horizonti. 240. XXVIII. ſeu GE. 241. I. rationem EG. *ibid.* XVII. GE ad BF. *ibid.* XVIII. GE ad BE. 244. XX. aliqvam 246. XIII. rationum. 248. X. qvæ fit addendo XV. Qvod. 253. XVI. bicubitale. *ibid.* XXVI. τῷ ἑνί, 256. VII. Ἐκλογή. 258. VI. neceſſarium. 266. *inter lin.* XXII.

&

Digitized by Google

&XXIII. inſere τῇ ΕΖ ἡ ΔΘ ἴση, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΓΘ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΚ, καὶ κείσθω. 269. XXIII. ſigura XVII. 285. XXVIII αγ ϱβ 289. XXIIII. omni hac rationum. 292. *inter* XXI. *&* XXII *inſer.* qvamvis hæc potius de æqvalitate duarum rationum rationis ab aliis explicetur. 301. XXI. deprehendit. 302. XXVII. rationem 81. 310. XX. fiatqve æqvalis. 325. XXI, & CD minor. 327. XXI. argumentis 389. VIII. σχέσιν. 343. XIII. cognoſcitur. 349. XXVI. ſic 64. 350. II inſipidum. XX tibiipſi. 355. XIX. conſeqventis. 372. XXII. Scepticorum.

Cœtera ſi qva erunt, per te emendabis. Vale.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google